Classificações topológicas reveladas pelo fluxo de Ricci

Matheus Horácio

27 de maio de 2026

Sumário

1. Geometria e cosmologia: o começo

2. Classificações topológicas

3. O fluxo de Ricci

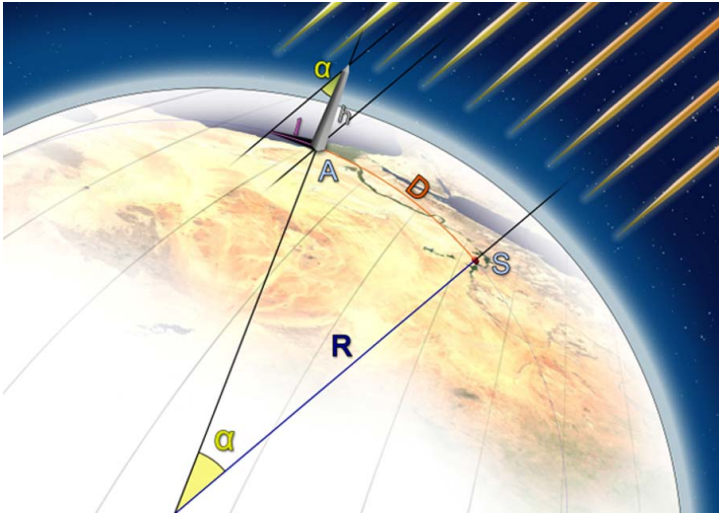
4. Referências

Geometria e cosmologia: o começo

Eratóstenes: o homem que mediu o mundo

- “Geometria” vem do grego e significa “medir” a Terra. A primeira pessoa que temos registro de fazer isso foi o grande astrônomo e matemático grego Eratóstenes, há mais de 2200 anos.

Eratóstenes: o homem que mediu o mundo



Os primeiros cosmólogos

- A “forma” da Terra, porém, era um assunto de interesse aos antigos gregos séculos antes de Eratóstenes.

Os primeiros cosmólogos

- A “forma” da Terra, porém, era um assunto de interesse aos antigos gregos séculos antes de Eratóstenes.
- Tales de Mileto acreditava que a Terra era um disco plano flutuando num oceano gigante.

Os primeiros cosmólogos

- A “forma” da Terra, porém, era um assunto de interesse aos antigos gregos séculos antes de Eratóstenes.
- Tales de Mileto acreditava que a Terra era um disco plano flutuando num oceano gigante.

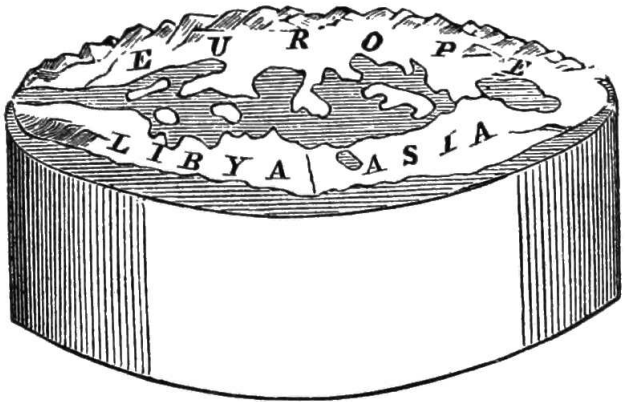


Os primeiros cosmólogos

- Por outro lado, Anaximandro, discípulo de Tales, pensava que a Terra tinha a forma de um cilindro, onde os continentes estavam localizados numa de suas faces circulares.

Os primeiros cosmólogos

- Por outro lado, Anaximandro, discípulo de Tales, pensava que a Terra tinha a forma de um cilindro, onde os continentes estavam localizados numa de suas faces circulares.



Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos com a existência de leis físicas que constituam obstruções a possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos com a existência de leis físicas que constituam obstruções a possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

Perguntas primordiais

- De modo geral, podemos perguntar quais são todas as formas possíveis que a Terra poderia assumir. Nos limitando somente à perspectiva matemática abstrata (ou seja, sem nos preocuparmos com a existência de leis físicas que constituam obstruções a possíveis formatos), tal pergunta admite a seguinte formalização:

Pergunta

Quais são todas as topologias possíveis de uma superfície fechada?

- Por "fechada", queremos dizer *compacta e sem bordo*.

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

Perguntas primordiais

- Podemos ir ainda além e indagar:

Pergunta

Qual é a "melhor" métrica que uma superfície fechada qualquer admite?

- Veremos que essas duas perguntas estão intimamente relacionadas.

O Cosmos

- Nas palavras de Carl Sagan, o Cosmos é tudo o que existe, existiu ou existirá.

O Cosmos

- Nas palavras de Carl Sagan, o Cosmos é tudo o que existe, existiu ou existirá.
- A teoria da relatividade geral de Einstein modela o Cosmos como uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão quatro, cuja geometria local é descrita pela seguinte equação:

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Scal} \cdot g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

- Sendo assim, podemos muito bem perguntar: dada uma fibração do Cosmos por “fatias temporais” tri-dimensionais, quais são todas as topologias e geometrias possíveis de tais fatias?

Observações importantes

- Em dimensão ≤ 3,

$$\text{classificações topológicas} \iff \text{classificações diferenciáveis}$$

Para mais detalhes, consulte [1]. Podemos então reformalizar os problemas anteriores da seguinte maneira:

Classificações topológicas

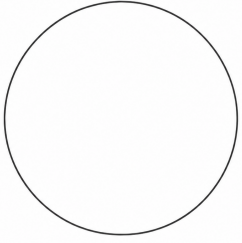
Aquecimento em dimensão um: curvas

Compacidade e a presença de bordo são invariantes topológicos que juntos determinam completamente todas as variedades de dimensão 1.

Aquecimento em dimensão um: curvas

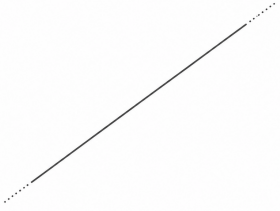
Compacidade e a presença de bordo são invariantes topológicos que juntos determinam completamente todas as variedades de dimensão 1.

O círculo $\mathbb{S}^1$.



(Fechado)

A reta $\mathbb{R}$.



(Aberta)

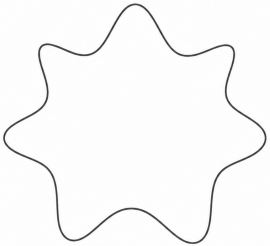
Aquecimento em dimensão um: curvas

Geometrização em dimensão 1 é portanto trivial. Não existe um invariante geométrico (local) intrínseco que distingua duas variedades quaisquer de dimensão 1.

Aquecimento em dimensão um: curvas

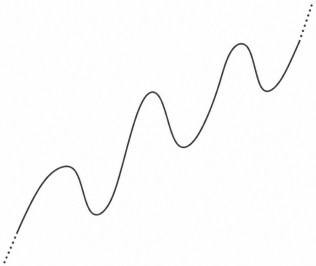
Geometrização em dimensão 1 é portanto trivial. Não existe um invariante geométrico (local) intrínseco que distingua duas variedades quaisquer de dimensão 1.

O círculo $\mathbb{S}^1$.



(Fechado)

A reta $\mathbb{R}$.



(Aberta)

Uma pergunta muito velha e natural

Quais são todas as superfícies fechadas?

Uma pergunta muito velha e natural

Quais são todas as superfícies fechadas?

Resposta

Existem dois invariantes topológicos que parametrizam completamente a lista de todas as superfícies fechadas: a orientabilidade e o gênero (ou, equivalentemente, a característica de Euler).

Uma pergunta muito velha e natural

Quais são os blocos de construção de todas as superfícies (orientáveis e fechadas)? E como juntamos esses blocos?

Uma pergunta muito velha e natural

Quais são os blocos de construção de todas as superfícies (orientáveis e fechadas)? E como juntamos esses blocos?

Resposta

Os blocos de construção para superfícies fechadas e orientáveis são ***toros*** e conseguimos juntá-los ao fazer ***somas conexas***.

- Dadas duas superfícies fechadas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, existe uma maneira de construir uma superfície nova chamada da ***soma conexa*** de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, que denotaremos por $\mathcal{M}\#\mathcal{N}$.

- Dadas duas superfícies fechadas $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, existe uma maneira de construir uma superfície nova chamada da ***soma conexa*** de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, que denotaremos por $\mathcal{M}\#\mathcal{N}$.
- Escolhemos duas bolas V_1, V_2, em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente, pequenas o suficiente de forma a serem homeomorfas a discos. Em seguida removemos o interior dessas duas bolas, resultando em dois bordos ∂V_1 e ∂V_2 homeomorfos a $\mathbb{S}^1$. Ao identificar esses bordos, obtemos uma nova superfície conexa.

A soma conexa de duas superfícies

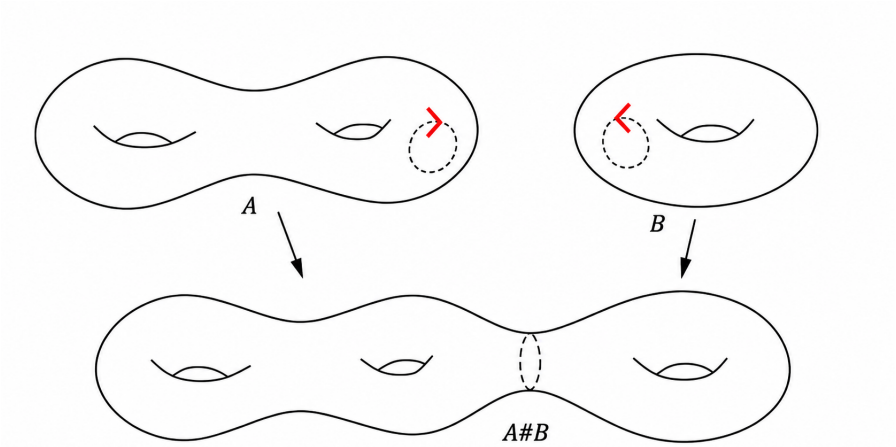


Figura 1: a soma conexa de um toro com um bi-toro

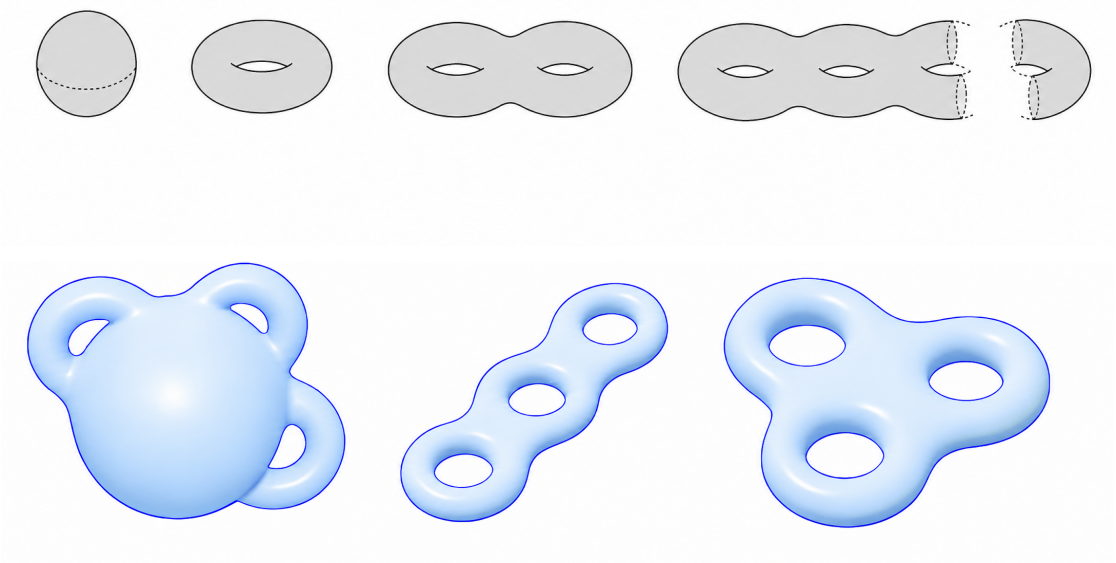


Figura: exemplos de superfícies de gênero ≤ 3.

A soma conexa de duas superfícies

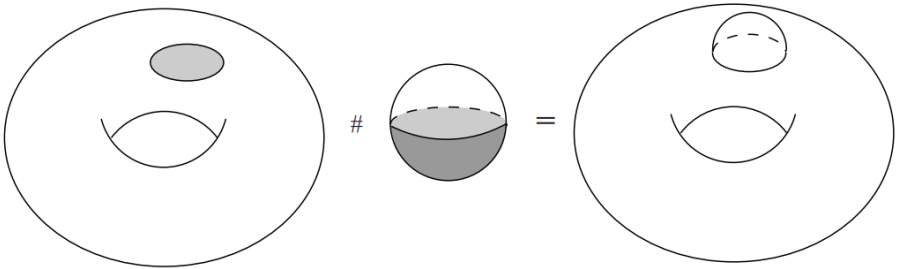


Figura 2: a soma conexa com uma esfera

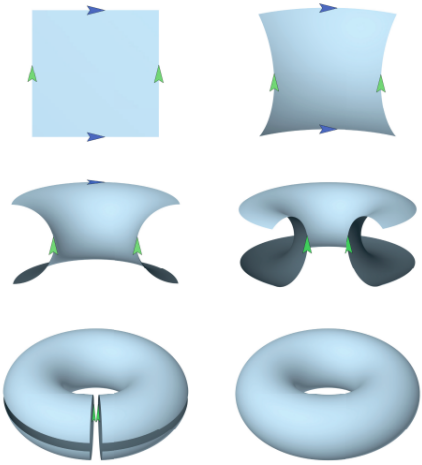
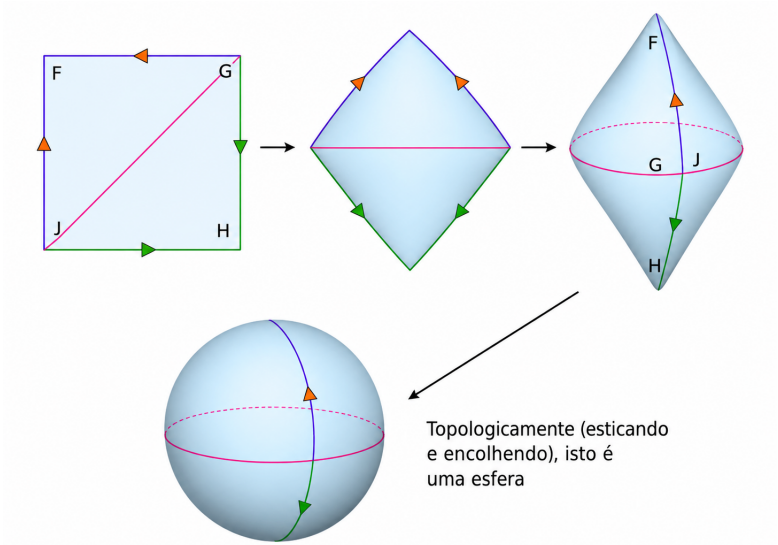


Figura 3: a representação poligonal de um toro

Representações poligonais



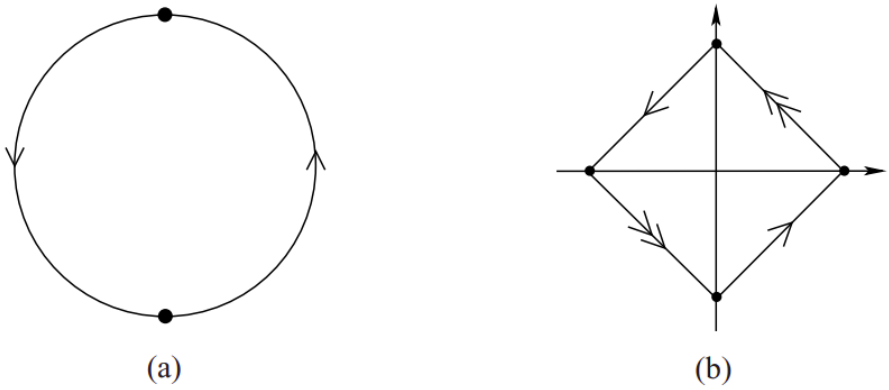


Figura 4: representações do plano projetivo $\mathbb{RP}^2$

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação poligonal. Em geral, temos também a seguinte:

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação poligonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação poligonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

É possível mostrar que toda superfície compacta admite uma representação poligonal. Em geral, temos também a seguinte:

A classificação de superfícies fechadas

Toda variedade bi-dimensional $\mathcal{M}^2$ conexa e fechada é homeomorfa a exatamente um dos seguintes espaços:

- *a esfera* $\mathbb{S}^2$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do toro* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
- *a soma conexa finita de uma ou mais cópias do plano projetivo* $\mathbb{RP}^2$

Dimensão dois: superfícies

"O teorema de classificação das superfícies é uma conquista matemática da maior grandeza, comparável à descoberta da América ou dos raios X. Trata-se de uma descoberta genuína da ciência natural matemática, sendo até difícil dizer se o fato em si é mais atribuível à física ou à matemática. Em sua importância tanto para as aplicações quanto para o desenvolvimento de uma Weltanschauung (visão de mundo) correta, ele supera de longe "conquistas" da matemática como a demonstração do último teorema de Fermat ou a demonstração de que todo número inteiro suficientemente grande pode ser representado como soma de três números primos."

"O teorema de classificação das superfícies é uma conquista matemática da maior grandeza, comparável à descoberta da América ou dos raios X. Trata-se de uma descoberta genuína da ciência natural matemática, sendo até difícil dizer se o fato em si é mais atribuível à física ou à matemática. Em sua importância tanto para as aplicações quanto para o desenvolvimento de uma Weltanschauung (visão de mundo) correta, ele supera de longe "conquistas" da matemática como a demonstração do último teorema de Fermat ou a demonstração de que todo número inteiro suficientemente grande pode ser representado como soma de três números primos."

V. I. Arnold, *On teaching mathematics*

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.

Dimensão dois: superfícies

- O número g de toros presentes na decomposição de $\mathcal{M}$ é chamado do *gênero* de $\mathcal{M}$.
- A característica de Euler é um invariante topológico que justifica o "exatamente" citado na classificação anterior. Ela e a orientabilidade são invariantes topológicos que determinam completamente a topologia de uma superfície fechada.
- Na busca de invariantes topológicos em dimensões mais altas, Poincaré descobriu o grupo fundamental.

E quanto à geometria?

Um dos teoremas fundamentais no estudo de superfícies é o seguinte:

E quanto à geometria?

Um dos teoremas fundamentais no estudo de superfícies é o seguinte:

Teorema da uniformização

Toda superfície fechada $\mathcal{M}^2$ admite uma métrica Riemanniana de curvatura seccional constante.

E quanto à geometria?

Um dos teoremas fundamentais no estudo de superfícies é o seguinte:

Teorema da uniformização

Toda superfície fechada $\mathcal{M}^2$ admite uma métrica Riemanniana de curvatura seccional constante.

Consequentemente, toda superfície fechada é difeomorfa a exatamente um quociente de uma das três seguintes geometrias modelo: $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$. A topologia e geometria se relacionam pelo teorema de Gauss-Bonnet:

$$\int_{\mathcal{M}^2} K \, \mathrm{d}A = 2\pi \cdot \chi(\mathcal{M}^2)$$

Dimensão três: variedades fechadas

Uma pergunta muito velha e natural

Quais são todas as variedades fechadas tridimensionais?

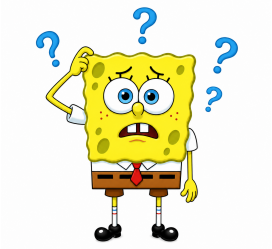
Uma pergunta muito velha e natural

Quais são todas as variedades fechadas tridimensionais?

O zoológico

M/Γ

$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$



$\mathbb{S}^3$

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$\mathbb{RP}^3$

? ? ? ?

$M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_k$

$\Sigma_g \times \mathbb{S}^1$

Henri Poincaré.



- Por volta dos anos 1900, ele começou a estudar relações entre geometria e “topologia”.

Henri Poincaré.



- Por volta dos anos 1900, ele começou a estudar relações entre geometria e “topologia”.
- Um dos seus principais resultados nessa área foi o teorema de uniformização (que é a geometrização para superfícies).

Henri Poincaré.



- Por volta dos anos 1900, ele começou a estudar relações entre geometria e “topologia”.
- Um dos seus principais resultados nessa área foi o teorema de uniformização (que é a geometrização para superfícies).
- Mas (possivelmente ainda mais importantemente) ele também introduziu conceitos como o **grupo fundamental** e os **grupos de homologia** (usar álgebra para distinguir topologias).

Uma velha pergunta...

Quais são todas as 3-variedades (orientáveis, fechadas)?

Uma velha pergunta...

Quais são todas as 3-variedades (orientáveis, fechadas)?

Poincaré não conseguiu responder essa pergunta. Porém, ele tentou encontrar uma resposta a um problema significativamente mais modesto: ao invés de caracterizar todas as 3-variedades, ele tentou caracterizar a esfera $\mathbb{S}^3$ (a esfera tridimensional) usando invariantes topológicos.

Uma velha pergunta...

Quais são todas as 3-variedades (orientáveis, fechadas)?

Poincaré não conseguiu responder essa pergunta. Porém, ele tentou encontrar uma resposta a um problema significativamente mais modesto: ao invés de caracterizar todas as 3-variedades, ele tentou caracterizar a esfera $\mathbb{S}^3$ (a esfera tridimensional) usando invariantes topológicos.

(Primeira) conjectura de Poincaré.

Se S tem "a homologia de $\mathbb{S}^3$", então S é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

Uma velha pergunta...

Quais são todas as 3-variedades (orientáveis, fechadas)?

Poincaré não conseguiu responder essa pergunta. Porém, ele tentou encontrar uma resposta a um problema significativamente mais modesto: ao invés de caracterizar todas as 3-variedades, ele tentou caracterizar a esfera $\mathbb{S}^3$ (a esfera tridimensional) usando invariantes topológicos.

(Primeira) conjectura de Poincaré.

Se S tem "a homologia de $\mathbb{S}^3$", então S é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$.

CINQUIÈME COMPLÉMENT À L'ANALYSIS SITUS.

Par M. H. Poincaré, à Paris.

Adunanza del 22 novembre 1903.

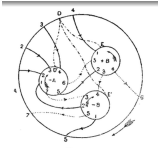


Fig. 4.

A conjectura é ***falsa***. Existe uma 3-variedade S com a homologia de $\mathbb{S}^3$, mas não homeomorfa a $\mathbb{S}^3$ (o primeiro exemplo de uma esfera de homologia).

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K'_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_3 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface W ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$ et réciproquement?

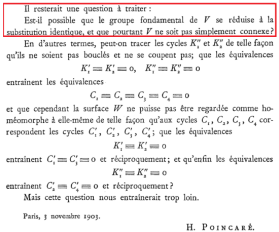
Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Paris, 3 novembre 1903.

H. POINCARÉ.

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?



Il resterait une question à traiter :
Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?
En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K'_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences
$$K'_1 \equiv K'_4 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$
entraînent les équivalences
$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$
et que cependant la surface W ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; que les équivalences
$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$
entraînent $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences
$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$
entraînent $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$ et réciproquement?
Mais cette question nous entraînerait trop loin.
Paris, 3 novembre 1903.
H. POINCARÉ.

Il resterait une question à traiter :
Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

Pergunta de Poincaré (1903).

Resta uma questão a tratar:

É possível que o grupo fundamental de V seja trivial e, ainda assim, V não seja homeomorfa a $\mathbb{S}^3$?

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K'_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_2 \equiv K'_4 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_3 \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface W ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$ et réciproquement?

Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Paris, 3 novembre 1903.

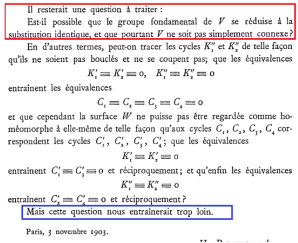
Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à l substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe

Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Paris, 3 novembre 1903.

H. POINCARÉ.



Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K'_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface W ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$ et réciproquement?

Mais cette question nous entraînerait trop loin.

Paris, 3 novembre 1903.

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à ! substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe

Mais cette question nous entraînerait trop loin.

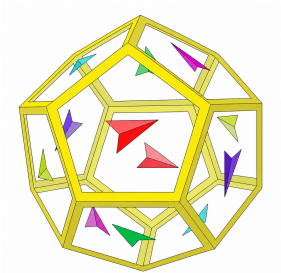
Paris, 3 novembre 1903.

H. Poincaré.

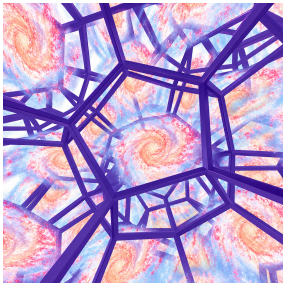
Comentário de Poincaré.

Mais cette question nous entraînerait trop loin
(Mas essa questão nos levaria longe demais.)

Qual é a geometria do Universo?

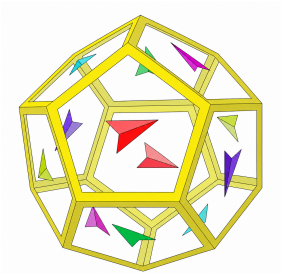


Visualização do dodecaedro de Poincaré: cole faces opostas após um décimo de volta no sentido anti-horário (rotação por $2\pi/10 = \pi/5$ radianos).

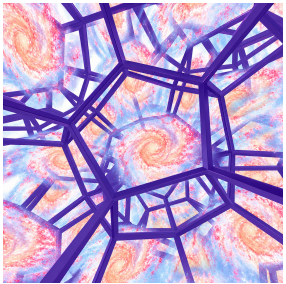


Visão dentro dum universo de uma só galáxia modelado pelo dodecaedro de Poincaré.

Qual é a geometria do Universo?



Visualização do dodecaedro de Poincaré: cole faces opostas após um décimo de volta no sentido anti-horário (rotação por $2\pi/10 = \pi/5$ radianos).

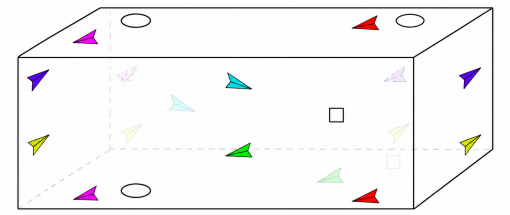


Visão dentro dum universo de uma só galáxia modelado pelo dodecaedro de Poincaré.

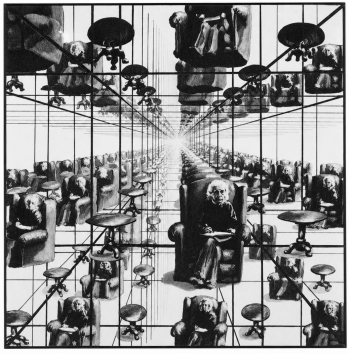
Pode-se mostrar que o espaço dodecaédrico de Poincaré é um quociente da 3-esfera $\mathbb{S}^3$ por um grupo de isometrias. Embora longe de ser óbvio, é possível verificar que $\mathbb{S}^3$ é ladrilhada por 120 cópias deste dodecaedro!

Em [13], o dodecaedro de Poincaré foi proposto como uma possível forma do Universo.

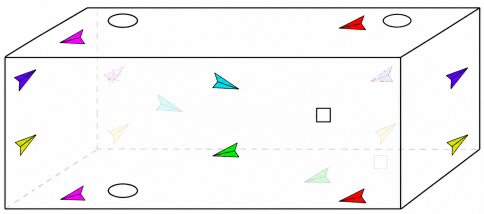
Qual é a geometria do Universo?



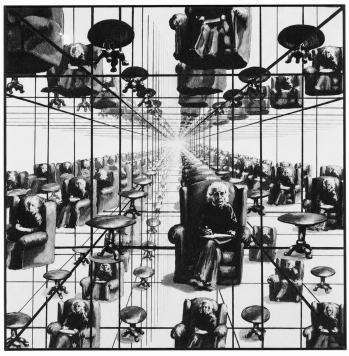
Toro tridimensional $\mathbb{T}^3$: faces opostas do cubo são identificadas.



Qual é a geometria do Universo?



Toro tridimensional $\mathbb{T}^3$: faces opostas do cubo são identificadas.



Dados cosmológicos experimentais indicam que o Universo observável é espacialmente plano. Sob a hipótese adicional de compacidade, o toro tridimensional $\mathbb{T}^3$ é uma das apenas 10 formas espaciais euclidianas compactas que poderiam modelar sua forma global.

William Thurston.



"E em dimensão três? Será que é possível achar ***geometrias modelo*** *para todas variedades tridimensionais?"*

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 6, Number 3, May 1982

THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS, KLEINIAN GROUPS AND HYPERBOLIC GEOMETRY

BY WILLIAM P. THURSTON

1. A conjectural picture of 3-manifolds. A major thrust of mathematics in the late 19th century, in which Poincaré had a large role, was the uniformization theory for Riemann surfaces: that every conformal structure on a closed oriented surface is represented by a Riemannian metric of constant curvature. For the typical case of negative Euler characteristic (genus greater than 1) such a metric gives a hyperbolic structure: any small neighborhood in the surface is isometric to a neighborhood in the hyperbolic plane, and the surface itself is the quotient of the hyperbolic plane by a discrete group of motions. The exceptional cases, the sphere and the torus, have spherical and Euclidean structures.

Three-manifolds are greatly more complicated than surfaces, and I think it is fair to say that until recently there was little reason to expect any analogous theory for manifolds of dimension 3 (or more)—except perhaps for the fact that so many 3-manifolds are beautiful. The situation has changed, so that I feel fairly confident in proposing the

1.1. CONJECTURE. *The interior of every compact 3-manifold has a canonical decomposition into pieces which have geometric structures.*



A conjectura da geometrização de Thurston

- Em dimensão três, ainda temos as três geometrias modelo de curvatura constante: $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Mas não há esperança de uma classificação tão boa quanto em dimensão dois: de fato, existem infinitas variedades tridimensionais que não admitem nenhuma métrica de curvatura seccional constante.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)
- a geometria Nil, modelada no grupo de Heisenberg; e

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)
- a geometria Nil, modelada no grupo de Heisenberg; e
- a geometria Sol, modelada no grupo de Lie solúvel $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$.

A conjectura da geometrização de Thurston

Cinco outras geometrias surgem de produtos cartesianos ou "torcidos" de geometrias de dimensão mais baixa:

- o produto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$
- o produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
- o recobrimento universal $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (um fibrado torcido sobre $\mathbb{H}^2$)
- a geometria Nil, modelada no grupo de Heisenberg; e
- a geometria Sol, modelada no grupo de Lie solúvel $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$.

Visualizações globais fiéis dessas geometrias são impossíveis. Bastante imaginação de certa forma contorna esse problema, como pode ser visto em [12].

Geometrização em dimensão três: preliminares

- Dizemos que $\mathcal{M}^3$ é *prima* se, sempre que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$, então $\mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_2$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. O teorema de Kneser-Milnor garante que toda 3-variedade fechada e orientável é soma conexa finita, essencialmente única, de variedades primas.

- Dizemos que $\mathcal{M}^3$ é *prima* se, sempre que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$, então $\mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_2$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. O teorema de Kneser-Milnor garante que toda 3-variedade fechada e orientável é soma conexa finita, essencialmente única, de variedades primas.
- Dizemos que um toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathcal{M}^3$ é *incompressível* se a inclusão induz uma injeção

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{M}^3).$$

Geometrização em dimensão três: preliminares

- Dizemos que $\mathcal{M}^3$ é *prima* se, sempre que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$, então $\mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_2$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^3$. O teorema de Kneser-Milnor garante que toda 3-variedade fechada e orientável é soma conexa finita, essencialmente única, de variedades primas.
- Dizemos que um toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathcal{M}^3$ é *incompressível* se a inclusão induz uma injeção
$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{M}^3).$$
- Com a única exceção de $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ (que admite uma métrica localmente isométrica à de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$), toda soma conexa $\mathcal{M}_1 \# \mathcal{M}_2$ não trivial não admite qualquer geometrização. Na verdade, existem infinitos exemplos de 3-variedades fechadas orientáveis que não admitem uma única estrutura geométrica modelada em uma das oito geometrias (isto é, só se tornam geométricas após a decomposição por somas conexas e, nos fatores primos, após cortes ao longo de toros incompressíveis.).

A conjectura da geometrização de Thurston

Seja $\mathcal{M}^3$ fechada, orientável e prima. Então existe uma coleção finita de toros mergulhados incompressíveis dois a dois disjuntos,

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k\}$$

tais que o interior de cada componente C de $\mathcal{M} \setminus \bigsqcup_i \mathcal{T}_i$ admite uma métrica completa de volume finito, modelada em uma das oito geometrias de Thurston (ou seja, isométrica a um quociente de uma das geometrias modelo por um grupo discreto de isometrias agindo livremente e de maneira propriamente descontínua).

Geometrização $\Longrightarrow$ conjectura de Poincaré

Suponha $\mathcal{M}^3$ fechada e simplesmente conexa.

- Por Kneser-Milnor, $\mathcal{M} = N_1 \# \cdots \# N_k$ com cada N_i prima; e por van Kampen, $\pi_1(N_i) = 1, \ \forall i$.

Geometrização $\Longrightarrow$ conjectura de Poincaré

Suponha $\mathcal{M}^3$ fechada e simplesmente conexa.

- Por Kneser-Milnor, $\mathcal{M} = N_1 \# \cdots \# N_k$ com cada N_i prima; e por van Kampen, $\pi_1(N_i) = 1, \ \forall i$.
- Apliquemos a geometrização a cada N_i: um toro incompressível $T \subset N_i$ forneceria uma injeção $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(T) \hookrightarrow \pi_1(N_i) = 1$, o que evidentemente é um absurdo. Portanto a coleção de toros é vazia, e a própria N_i pode ser geometrizada por uma das oito geometrias modelo.

Geometrização $\implies$ conjectura de Poincaré

Suponha $\mathcal{M}^3$ fechada e simplesmente conexa.

- Por Kneser-Milnor, $\mathcal{M} = N_1 \# \cdots \# N_k$ com cada N_i prima; e por van Kampen, $\pi_1(N_i) = 1, \ \forall i$.
- Apliquemos a geometrização a cada N_i: um toro incompressível $T \subset N_i$ forneceria uma injeção $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(T) \hookrightarrow \pi_1(N_i) = 1$, o que evidentemente é um absurdo. Portanto a coleção de toros é vazia, e a própria N_i pode ser geometrizada por uma das oito geometrias modelo.
- O fato de N_i ser simplesmente conexa garante que ela é o seu próprio recobrimento universal, que também é compacto. Das oito geometrias de Thurston, apenas $\mathbb{S}^3$ é compacta. Logo toda N_i é $\mathbb{S}^3$, de forma que

$$\mathcal{M}^3 = \mathbb{S}^3 \# \cdots \# \mathbb{S}^3 = \mathbb{S}^3.$$

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan,

A conjectura da geometrização de Thurston

- Thurston verificou que uma grande classe de variedades, chamadas *variedades de Haken*, satisfazia sua conjectura.
- Tal trabalho foi importantíssimo. Nas palavras de John Morgan,

A importância do trabalho de Thurston

"*Na minha perspectiva, antes do trabalho de Thurston em 3-variedades hiperbólicas e sua formalização da Conjectura da Geometrização, não havia consenso entre os especialistas quanto à validade da conjectura de Poincaré. Depois do trabalho de Thurston (não obstante o fato de que o mesmo não tinha nenhuma consequência direta à Conjectura de Poincaré), se desenvolveu um consenso de que ambas a Conjectura de Poincaré e a Conjectura da Geometrização eram verdadeiras.*"

O fluxo de Ricci

Richard Hamilton.



"Se alguém parar pra pensar no que devemos esperar de um fluxo, queremos que ele seja de segunda ordem, parabólico e quase-linear, e que se difunda igualmente em todas as direções. Acontece que há apenas um fluxo com essa propriedade: o fluxo de Ricci

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \ \mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

"

O plano de ataque

- Comece com uma 3-variedade fechada arbitrária munida de uma métrica qualquer. Onde a curvatura for grande, deforme a métrica para que a mesma diminua, e onde for pequena, deforme para que aumente. A princípio, o melhor que se pode esperar é que a deformação deixe a variedade inicial com uma geometria "uniforme", de curvatura constante. Mas qual curvatura considerar?

$$\frac{\partial}{\partial t} g = ?$$

O plano de ataque

- Em dimensão três, Ric determina Rm. É natural então considerar

$$\frac{\partial}{\partial t} g = c \cdot \mathrm{Ric}$$

para alguma constante $c \neq 0$.

- Uma vez que

$$\begin{aligned}
-2 \cdot \mathrm{Ric}_{jk} &= -2 \left\{ \mathrm{Rm}^{p}_{pjk} \right\} \\
&= -2 \left\{ \partial_p \Gamma^{p}_{jk} - \partial_j \Gamma^{p}_{pk} + \Gamma^{q}_{jk} \Gamma^{p}_{pq} - \Gamma^{q}_{pk} \Gamma^{p}_{jq} \right\} \\
&= -\partial_p \left\{ g^{pq} \left(\partial_j g_{kq} + \partial_k g_{jq} - \partial_q g_{jk} \right) \right\} \\
&+ \partial_j \left\{ g^{pq} \left(\partial_p g_{kq} + \partial_k g_{pq} - \partial_q g_{kp} \right) \right\} + \left\{ -2\Gamma^{q}_{jk} \Gamma^{p}_{pq} + 2\Gamma^{q}_{pk} \Gamma^{p}_{jq} \right\} \\
&= \cdots \\
&= \Delta g_{jk} + Q\left(\partial g, g^{-1} \right)
\end{aligned}$$

  a escolha natural é $c = -2$.

O plano de ataque

- Consideraremos então a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \, \mathrm{Ric}_{g(t)}$$

- Consideraremos então a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}$$

- Hamilton mostrou o sucesso da estratégia descrita anteriormente em dimensão 2. Apesar de a sua prova original usar o teorema da uniformização, tal dependência foi removida por Chen-Lu-Tian em [5], de forma que o fluxo pode ser usado para provar o teorema da uniformização.

Exemplos

- Suponha que $(\mathcal{M}, g_0)$ é Einstein, de forma que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$, onde λ é uma constante. É fácil mostrar que $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ é a solução do fluxo de Ricci desejada.

Exemplos

- Suponha que $(\mathcal{M}, g_0)$ é Einstein, de forma que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$, onde λ é uma constante. É fácil mostrar que $g(t) = (1-2\lambda t)g_0$ é a solução do fluxo de Ricci desejada.
- De fato, fazendo o palpite de que $g_{ij}(x,t) = \rho^2(t) g_{ij}(x,0)$ vemos que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,t) = \mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$.

Exemplos

- Suponha que $(\mathcal{M}, g_0)$ é Einstein, de forma que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$ para todo $p \in \mathcal{M}$, onde λ é uma constante. É fácil mostrar que $g(t) = (1-2\lambda t)g_0$ é a solução do fluxo de Ricci desejada.
- De fato, fazendo o palpite de que $g_{ij}(x,t) = \rho^2(t) g_{ij}(x,0)$ vemos que $\mathrm{Ric}_{ij}(p,t) = \mathrm{Ric}_{ij}(p,0) = \lambda g_{ij}(p,0)$.
- Nesse caso, a equação do fluxo de Ricci se escreve então como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^2(t) g_{ij}(p,0)\right) = -2\lambda g_{ij}(x,0)$$

que nos dá a EDO

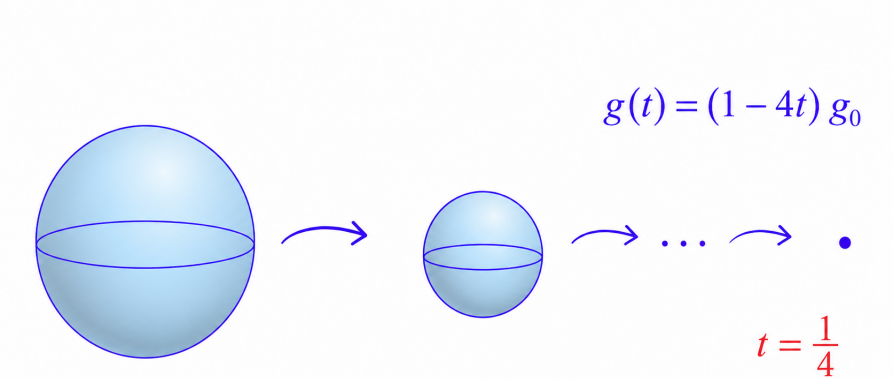
$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\lambda}{\rho}$$

cuja solução é dada por

$$\rho^2(t) = 1 - 2\lambda t$$

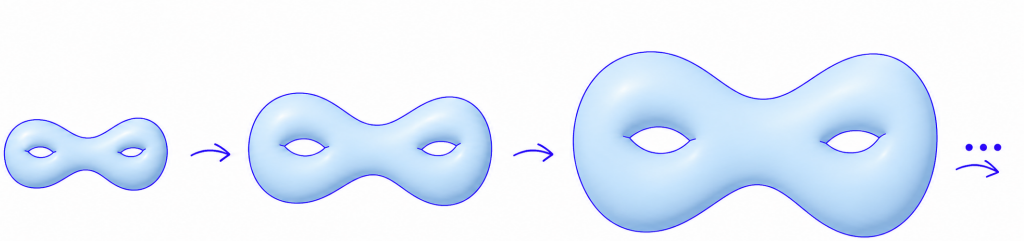
Exemplos

- Em particular, uma esfera tem um passado eterno mas um futuro finito: sob o fluxo, ela encolhe até um ponto, enquanto sua curvatura "explode" ao se aproximar da singularidade.



Exemplos: variedades de Einstein

- Por outro lado, uma variedade $\mathbb{H}^3/\Gamma$ de curvatura negativa constante tem passado finito e um futuro eterno: sob o fluxo, ela expande indefinidamente sem nunca "explodir", e sua curvatura fica arbitrariamente próxima de zero conforme $t \to +\infty$.



$$g(t) = (1+4t)\, g_0$$

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.
- **Caracterização da formação de singularidades pela curvatura.** Se a solução do fluxo existe num intervalo temporal $[0, T)$ mas não se estende a nenhum intervalo maior $[0, T + \delta)$ com $\delta > 0$, então existe um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que o tensor curvatura $\mathrm{Rm}(x, t)$ da métrica $g(t)$ "explode", i.e

$$\lim_{t \to T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \| \mathrm{Rm}(x, t) \| \right) = \infty$$

Os primeiros resultados de Hamilton

- **Existência a curto prazo e unicidade.** Se $(\mathcal{M}, g_0)$ é uma variedade Riemanniana compacta, existe $\varepsilon > 0$ dependendo somente de g_0 e uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci definida para $t \in [0, \varepsilon)$ com $g(0) = g_0$.
- **Caracterização da formação de singularidades pela curvatura.** Se a solução do fluxo existe num intervalo temporal $[0, T)$ mas não se estende a nenhum intervalo maior $[0, T + \delta)$ com $\delta > 0$, então existe um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que o tensor curvatura $\mathrm{Rm}(x, t)$ da métrica $g(t)$ "explode", i.e

$$\lim_{t \to T^-} \left(\sup_{x \in \mathcal{M}} \| \mathrm{Rm}(x, t) \| \right) = \infty$$

- A positividade do operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$ é preservada pelo fluxo.

Velocidade infinita de propagação

- A evolução da curvatura escalar ao longo do fluxo é governada pela seguinte equação de **reação-difusão**: $\partial_t \mathrm{Scal} = \Delta \mathrm{Scal} + 2|\mathrm{Ric}|^2$.
- Se $\mathcal{M}$ é fechada, conexa, $\mathrm{Scal}_{g_0} \geq 0$ e $\mathrm{Scal}_{g_0} \not\equiv 0$, então $\mathrm{Scal}_{g(t)}(x) > 0 \ \forall x \in \mathcal{M}, t > 0$.
- Uma região inicialmente plana sente imediatamente o resto da variedade: pode-se imaginar que o fluxo "explora" toda a variedade antes de começar.



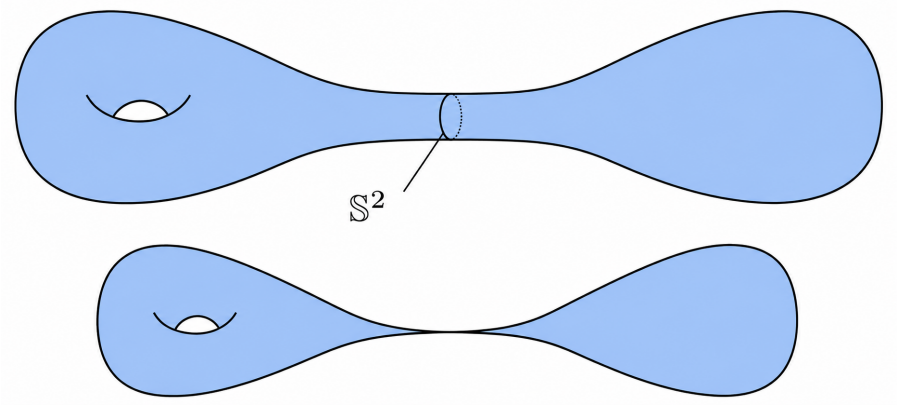
Figura: Cilindro plano com duas tampas arredondadas: a região central, inicialmente de curvatura nula, adquire curvatura positiva "instantaneamente" sob o fluxo.

Obstáculos

- A noção de que sob o fluxo a métrica deve "convergir" a uma métrica de curvatura constante precisa ser formalizada.

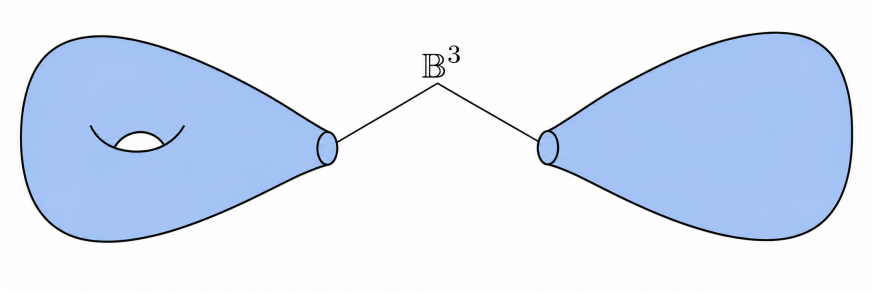
Obstáculos

- A noção de que sob o fluxo a métrica deve "convergir" a uma métrica de curvatura constante precisa ser formalizada.
- O fluxo pode encontrar singularidades do tipo "neck pinch"



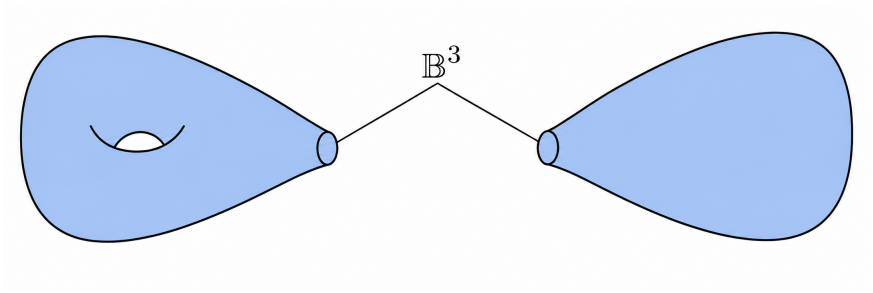
Obstáculos

- Para contornar esse problema, Hamilton teve a ideia de fazer “cirurgias” na variedade e logo após retomar o fluxo



Obstáculos

- Para contornar esse problema, Hamilton teve a ideia de fazer “cirurgias” na variedade e logo após retomar o fluxo



- Hamilton não conseguiu mostrar que tal processo não fica preso numa situação do tipo do paradoxo de Zeno. Perelman introduziu noções de cirurgia que evitavam tal situação.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

O primeiro avanço significativo

- O primeiro indício de que o plano de ataque via o fluxo de Ricci descrito anteriormente era promissor foi o seguinte resultado, obtido originalmente por Hamilton:

Um caso muito particular da conjectura de Poincaré

Seja $\mathcal{M}^3$ uma 3-variedade diferenciável fechada que admite uma métrica Riemanniana de curvatura de Ricci estritamente positiva. Então o recobrimento universal de $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$. Em particular, se $\mathcal{M}$ é simplesmente conexa, então $\mathcal{M}$ é $\mathbb{S}^3$.

- Antes do trabalho de Hamilton, não se sabia se 3-variedades com sec > 0 (resp. 4-variedades com operador de curvatura positivo) eram formas espaciais. Até hoje, não existe nenhuma prova de tal fato que não use o fluxo de Ricci!

O primeiro avanço significativo

- Para abordarmos a demonstração desse resultado, precisaremos de algumas noções preliminares antes. A ideia é evoluir a métrica inicial de forma que a sua curvatura de Ricci seja "pinçada" e convirja a uma métrica de curvatura de Ricci constante.
- Iremos seguir de perto (a menos somente de algumas leves mudanças de notação) a abordagem apresentada por Peter Topping em [7].

O primeiro avanço significativo

Usando o princípio do máximo, podemos mostrar o seguinte resultado

O primeiro avanço significativo

Usando o princípio do máximo, podemos mostrar o seguinte resultado

"Explosão" uniforme da curvatura

Suponha que $g(t)$ é um fluxo de Ricci numa variedade fechada $\mathcal{M}$, que existe num intervalo $t \in [0, T]$. Se $\mathrm{Scal} \geq \delta > 0$ no instante inicial $t = 0$, então vale que

$$\mathrm{Scal} \geq \frac{\delta}{1 - \left(\frac{2\delta}{n}\right) t}$$

O primeiro avanço significativo

Usando o princípio do máximo, podemos mostrar o seguinte resultado

"Explosão" uniforme da curvatura

Suponha que $g(t)$ é um fluxo de Ricci numa variedade fechada $\mathcal{M}$, que existe num intervalo $t \in [0, T]$. Se $\mathrm{Scal} \geq \delta > 0$ no instante inicial $t = 0$, então vale que

$$\mathrm{Scal} \geq \frac{\delta}{1 - \left(\frac{2\delta}{n}\right) t}$$

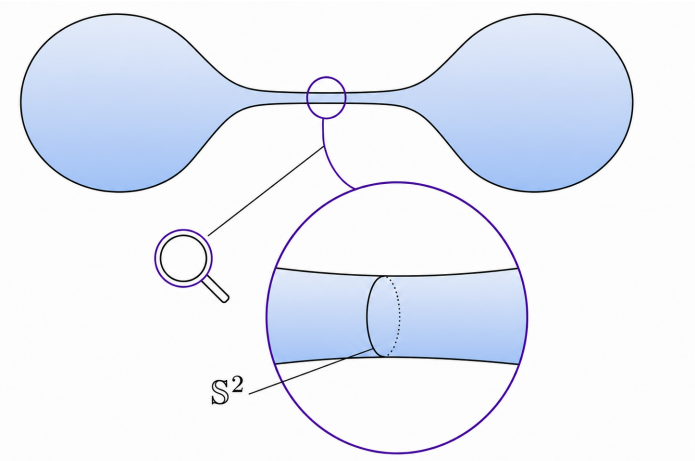
Em particular, se o fluxo é definido em $[0, T)$ e $\mathrm{Scal} \geq \delta > 0$ no instante inicial $t = 0$, então $T \leq \frac{n}{2\delta}$.

A estratégia

Iremos aplicar mudanças de escala (ou “inflações”) na variedade a fim de diminuir a curvatura. A análise do que acontece em tal limite inflacionário nos permitirá identificar a topologia de $\mathcal{M}^3$.

A estratégia

Iremos aplicar mudanças de escala (ou “inflações”) na variedade a fim de diminuir a curvatura. A análise do que acontece em tal limite inflacionário nos permitirá identificar a topologia de $\mathcal{M}^3$.



Convergência de variedades

- Uma exaustão de uma variedade $\mathcal{M}$ é uma sequência de abertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\overline{U_k}$ é compacto, $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ $\forall k$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \mathcal{M}$.

Convergência de variedades

- Uma exaustão de uma variedade $\mathcal{M}$ é uma sequência de abertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\overline{U_k}$ é compacto, $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ $\forall k$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = \mathcal{M}$.
- Em particular, se $K \subset \mathcal{M}$ é um subconjunto compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_n$, seja qual for $n \geq n_0$. Consequentemente, se $\mathcal{M}$ é compacta então $U_n = \mathcal{M}$ para todo n suficientemente grande.

Convergência de variedades

Diremos que uma sequência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ de variedades Riemannianas completas marcadas *converge* (suavemente) à variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ conforme $i \to \infty$ se existirem

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ satisfazendo $p \in \text{int}(\Omega_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Convergência de variedades

Diremos que uma sequência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ de variedades Riemannianas completas marcadas *converge* (suavemente) à variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ conforme $i \to \infty$ se existirem

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ satisfazendo $p \in \operatorname{int}(\Omega_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Convergência de variedades

Diremos que uma sequência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ de variedades Riemannianas completas marcadas *converge* (suavemente) à variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ conforme $i \to \infty$ se existirem

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ satisfazendo $p \in \operatorname{int}(\Omega_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$

tais que

$$\phi_i^* g_i \to g$$

suavemente conforme $i \to \infty$, no sentido de que para quaisquer compactos $K \subset \mathcal{M}$, o tensor $\phi_i^* g_i - g$ e todas as suas derivadas covariantes de todas as ordens (com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em K.

- Em particular, se $\mathcal{M}$ for compacta, $\mathcal{M}_i$ é difeomorfa a $\mathcal{M}$ para todo i suficientemente grande (a priori teríamos que $\mathcal{M}$ é difeomorfa somente à sua imagem por ϕ_i, mas como cada ϕ_i é um difeomorfismo e $\mathcal{M}$ é trivialmente simultaneamente aberta e fechada em $\mathcal{M}$, suas imagens são simultaneamente abertas e fechadas em $\mathcal{M}_i$, e portanto no caso em que $\mathcal{M}$ é compacta, $\mathcal{M}$ é difeomorfa a $\mathrm{img}(\phi_i) = \mathcal{M}_i$).

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

Convergência de variedades

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

-

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) > 0$$

Pode-se provar que duas consequências da convergência $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$ são que

- para qualquer $s > 0$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{B_{g_i}(p_i, s)} \|\nabla^k \mathrm{Rm}(g_i)\| < \infty$$

-

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) > 0$$

- Na verdade, as condições acima são suficientes para subconvergência.

"Arzelà-Ascoli" para convergência de Cheeger-Gromov

Suponha que $(\mathcal{M}_i, g_i, p_i)$ é uma sequência de variedades Riemannianas completas e marcadas (todas com a mesma dimensão n) satisfazendo as duas condições anteriores. Então existe uma variedade Riemanniana completa e marcada $(\mathcal{M}, g, p)$ (também de dimensão n) tal que após passar a uma subsequência em i,

$$(\mathcal{M}_i, g_i, p_i) \to (\mathcal{M}, g, p)$$

Convergência de variedades

As seguintes estimativas nos garantem metade do que precisamos para lidar com o caso de curvatura de Ricci inicial positiva:

As seguintes estimativas nos garantem metade do que precisamos para lidar com o caso de curvatura de Ricci inicial positiva:

Estimativas BBS

Suponha que $M > 0$ é uma constante e que $g(t)$ é um fluxo de Ricci numa variedade fechada $\mathcal{M}^n$, onde $t \in [0, M^{-1}]$. Então para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C = C(n,k)$ tal que se $\|\mathrm{Rm}\| \leq M$ em $\mathcal{M} \times [0, M^{-1}]$, então para qualquer $t \in [0, M^{-1}]$, vale

$$\|\nabla^k \mathrm{Rm}\| \leq \frac{CM}{t^{\frac{k}{2}}}$$

As seguintes estimativas nos garantem metade do que precisamos para lidar com o caso de curvatura de Ricci inicial positiva:

Estimativas BBS

Suponha que $M > 0$ é uma constante e que $g(t)$ é um fluxo de Ricci numa variedade fechada $\mathcal{M}^n$, onde $t \in [0, M^{-1}]$. Então para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C = C(n,k)$ tal que se $\|\mathrm{Rm}\| \leq M$ em $\mathcal{M} \times [0, M^{-1}]$, então para qualquer $t \in [0, M^{-1}]$, vale

$$\|\nabla^k \mathrm{Rm}\| \leq \frac{CM}{t^{\frac{k}{2}}}$$

A estimativa no raio de injetividade também é satisfeita (veja [7]).

- Considere $(\mathcal{M}_i, g_i(t))$ uma sequência de famílias suaves de variedades Riemannianas completas para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i, $(\mathcal{M}, g(t))$ uma família suave de variedades Riemannianas completas e $p \in \mathcal{M}$ um ponto de $\mathcal{M}$.

Convergência e compacidade de fluxos

- Considere $(\mathcal{M}_i, g_i(t))$ uma sequência de famílias suaves de variedades Riemannianas completas para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i, $(\mathcal{M}, g(t))$ uma família suave de variedades Riemannianas completas e $p \in \mathcal{M}$ um ponto de $\mathcal{M}$.
- Diremos que

$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$

conforme $i \to \infty$ se existirem:

Convergência e compacidade de fluxos

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ e satisfaz $p \in \text{int}(\Omega_i)$ para cada i

Convergência e compacidade de fluxos

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ e satisfaz $p \in \mathrm{int}(\Omega_i)$ para cada i
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$

- uma sequência de compactos $\Omega_i \subset \mathcal{M}$ que exausta $\mathcal{M}$ e satisfaz $p \in \mathrm{int}(\Omega_i)$ para cada i
- uma sequência de aplicações suaves $\phi_i : \Omega_i \to \mathcal{M}_i$ que são difeomorfismos sobre suas imagens e satisfazem $\phi_i(p) = p_i$

tais que

$$\phi_i^* g_i(t) \to g(t)$$

conforme $i \to \infty$ no sentido de que $\phi_i^* g(t) - g(t)$ e suas derivadas de todas as ordens (onde aqui nos referimos tanto às derivadas com respeito ao tempo quanto às derivadas covariantes espaciais com respeito a qualquer conexão inicial fixada) convergem uniformemente a zero em todo subconjunto compacto de $\mathcal{M} \times (a, b)$.

Convergência e compacidade de fluxos

Seja $\mathcal{M}_i$ uma sequência de variedades de dimensão n, e sejam $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i. Suponha que $g_i(t)$ é uma sequência de fluxos de Ricci completos em $\mathcal{M}_i$ para $t \in (a,b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$. Suponha que

- $$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{x\in\mathcal{M}_i \\ t\in(a,b)}} \|\mathrm{Rm}(g_i(t))\|(x) < \infty; \text{ e}$$

Então existe uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão n, um fluxo de Ricci completo $g(t)$ em $\mathcal{M}$ para $t \in (a,b)$, e um ponto $p \in \mathcal{M}$ tal que, após passar a uma subsequência em i, vale

$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$

Convergência e compacidade de fluxos

Seja $\mathcal{M}_i$ uma sequência de variedades de dimensão n, e sejam $p_i \in \mathcal{M}_i$ pontos de $\mathcal{M}_i$ para cada i. Suponha que $g_i(t)$ é uma sequência de fluxos de Ricci completos em $\mathcal{M}_i$ para $t \in (a,b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$. Suponha que

- $$\sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{x\in\mathcal{M}_i \\ t\in(a,b)}} \|\mathrm{Rm}(g_i(t))\|(x) < \infty; \text{ e}$$
- $$\inf_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{inj}(\mathcal{M}_i, g_i(0), p_i) > 0$$

Então existe uma variedade $\mathcal{M}$ de dimensão n, um fluxo de Ricci completo $g(t)$ em $\mathcal{M}$ para $t \in (a,b)$, e um ponto $p \in \mathcal{M}$ tal que, após passar a uma subsequência em i, vale

$$(\mathcal{M}_i, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, g(t), p)$$

Os limites inflacionários

- Estamos interessados em aplicar os teoremas vistos anteriormente para analisar mudanças de escala de fluxos de Ricci perto de suas singularidades. Seja $(\mathcal{M}, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci com $\mathcal{M}$ fechada no intervalo maximal $[0, T)$. Já vimos que

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t) \to \infty$$

conforme $t \uparrow T$.

Os limites inflacionários

- Estamos interessados em aplicar os teoremas vistos anteriormente para analisar mudanças de escala de fluxos de Ricci perto de suas singularidades. Seja $(\mathcal{M}, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci com $\mathcal{M}$ fechada no intervalo maximal $[0, T)$. Já vimos que

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t) \to \infty$$

  conforme $t \uparrow T$.
- Tomaremos pontos (p_i, t_i) que maximizem $\|\mathrm{Rm}\|$ no compacto $\mathcal{M} \times \left[0, T - \frac{1}{i}\right]$, ou seja

$$\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ t \in [0, T-1/i]}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t)$$

Os limites inflacionários

- Em particular, $\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \to \infty$ conforme $i \to \infty$. Definiremos fluxos re-escalados (e transladados) $g_i(t)$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

Os limites inflacionários

- Em particular, $\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \to \infty$ conforme $i \to \infty$. Definiremos fluxos re-escalados (e transladados) $g_i(t)$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

- Tais fluxos estão definidos nos intervalos

$$-t_i\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \leq t \leq (T - t_i)\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)$$

  Além disso, para cada i, temos $\|\mathrm{Rm}_{g_i(0)}\|(p_i) = 1$.

O limite inflacionário de singularidades

Suponha que $\mathcal{M}^n$ é uma variedade fechada, e $g(t)$ é um fluxo de Ricci num intervalo maximal $[0,T)$ com $T<\infty$. Então existem sequências $p_i \in \mathcal{M}$ e $t_i \uparrow T$ satisfazendo

$$\|\mathrm{Rm}\|(p_i,t_i) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{M}\\ t\in[0,t_i]}} \|\mathrm{Rm}\|(x,t) \to \infty$$

tais que, definindo

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i,t_i)\, g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i,t_i)}\right)$$

existem $b = b(n) > 0$, um fluxo de Ricci completo $(\mathcal{N},\hat{g}(t))$ definido em $t \in (-\infty, b)$, e $p_\infty \in \mathcal{N}$ tal que $(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{N},\hat{g}(t),p_\infty)$ conforme $i\to\infty$. Além disso, $\|\mathrm{Rm}_{\hat{g}(0)}\|(p_\infty)=1$, e $\|\mathrm{Rm}_{\hat{g}(t)}\| \le 1$ seja qual for $t\le 0$.

Evolução dos autovalores

- Em dimensão três, diagonalizemos o operador curvatura $\mathrm{Rm} : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$, ou seja, escolhamos uma base ortonormal $\{\varphi^\alpha\}$ de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ tal que

$$\left(\mathrm{Rm}\left(\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right)\right)_{1\leq\alpha,\beta\leq 3} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

onde, sem perda de generalidade ,

$$\lambda \geq \mu \geq \nu.$$

Evolução dos autovalores

- Pode-se mostrar que a evolução dos autovalores de $\mathrm{Rm}(t) : \Lambda^2(\mathcal{M}) \to \Lambda^2(\mathcal{M})$ é determinada pelo sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \lambda^2 + \mu\nu \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \mu^2 + \lambda\nu \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} &= \nu^2 + \lambda\mu\end{aligned}$$

- Além disso, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda-\mu) = (\lambda-\mu)(\lambda+\mu-\nu)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu-\nu) = (\mu-\nu)(-\lambda+\mu+\nu)$$

a desigualdade $\lambda(0) \geq \mu(0) \geq \nu(0)$ também é preservada, ou seja, $\lambda(t) \geq \mu(t) \geq \nu(t)$. Também é direto verificar que

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu+\nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\mu \end{pmatrix}$$

donde vem também

$$\mathrm{Scal} = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \lambda+\mu+\nu$$

Controle em dimensão três

Para quaisquer constantes $0 < \beta < B < \infty$ *tais que*

$$\beta g(0) \leq \mathrm{Ric}_{g(0)} \leq B g(0),$$

existem constantes $A = A(\beta, B) > 0$ *e* $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *tais que*

$$\lambda - \nu \leq A(\lambda + \mu)^{\theta}$$

ao longo do fluxo de Ricci.

Controle da curvatura

Para quaisquer constantes $0 < \beta < B < \infty$ *tais que*

$$\beta g_0 \leq \mathrm{Ric}_{g(0)} \leq B g_0$$

e para qualquer $\varepsilon > 0$*, existe uma constante* $C_\varepsilon = C(\beta, B, \varepsilon)$ *tal que*

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

A primeira classificação em dimensão três

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,

A primeira classificação em dimensão três

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,
- uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \uparrow T$,

A primeira classificação em dimensão três

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,
- uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \uparrow T$,
- um ponto $p_\infty \in \mathcal{M}$ e uma sequência $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$,

A primeira classificação em dimensão três

Seja $(\mathcal{M}^3, g_0)$ uma 3-variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Então o fluxo de Ricci $g(t)$ de $\mathcal{M}$ definido num intervalo maximal $[0, T)$ se arredonda no seguinte sentido: existem

- uma métrica g_∞ em $\mathcal{M}$ de curvatura seccional constante e positiva,
- uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \uparrow T$,
- um ponto $p_\infty \in \mathcal{M}$ e uma sequência $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$,

tal que ao definirmos novos fluxos de Ricci $g_i(t)$ para $t \leq 0$ por

$$g_i(t) = \|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i) \cdot g\left(t_i + \frac{t}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}\right)$$

então

$$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c-t)g_\infty, p_\infty)$$

- Usando os teoremas vistos anteriormente, obtemos uma constante $b > 0$, sequências $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $\{t_i \uparrow T\}_{i\in\mathbb{N}}$, fluxos por mudanças de escalas $g_i(t)$ e (para $t \in (-\infty, b)$) um limite do fluxo de Ricci $(\mathcal{N}, \hat{g}(t))$ com um ponto base $p_\infty \in \mathcal{N}$. Como também já vimos, para quaisquer $t \in [0, T)$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

- Usando os teoremas vistos anteriormente, obtemos uma constante $b > 0$, sequências $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $\{t_i \uparrow T\}_{i\in\mathbb{N}}$, fluxos por mudanças de escalas $g_i(t)$ e (para $t \in (-\infty, b)$) um limite do fluxo de Ricci $(\mathcal{N}, \hat{g}(t))$ com um ponto base $p_\infty \in \mathcal{N}$. Como também já vimos, para quaisquer $t \in [0, T)$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g \right\|_{g(t)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g(t)} + C_\varepsilon$$

- Uma vez que $g_i(t)$ difere de $g(t)$ somente por uma translação temporal e uma mudança de escala, então com respeito a $g_i(0)$ vale que

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot g_i(0) \right\|_{g_i(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{g_i(0)} + \frac{C_\varepsilon}{\|\mathrm{Rm}\|(p_i, t_i)}$$

- Fazendo $i \to \infty$, obtemos

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot \hat{g}(0) \right\|_{\hat{g}(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$$

- Fazendo $i \to \infty$, obtemos

$$\left\| \mathrm{Ric} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal} \cdot \hat{g}(0) \right\|_{\hat{g}(0)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$$

- Segue da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ que

$$\mathrm{Ric}_{\hat{g}(0)} - \frac{1}{3}\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \cdot \hat{g}(0) \equiv 0$$

e portanto $(\mathcal{N}, \hat{g}(0))$ é uma variedade de Einstein, de forma que $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)}$ é constante.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.
- Uma vez que $\mathrm{Scal}_{g(t)} > 0$, segue que $\mathrm{Scal}_{g_i(t)} > 0$ e portanto $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \geq 0$.

Demonstração

- Como $\dim(\mathcal{M}) = 3$, segue que $\hat{g}(0)$ tem curvatura seccional constante.
- Uma vez que $\mathrm{Scal}_{g(t)} > 0$, segue que $\mathrm{Scal}_{g_i(t)} > 0$ e portanto $\mathrm{Scal}_{\hat{g}(0)} \geq 0$.
- Vemos então que o valor constante que a curvatura seccional de $\hat{g}(0)$ assume é não-negativo. Mas lembrando que $\|\mathrm{Rm}(\hat{g}(0))\|(p_\infty) = 1$, concluímos que na verdade $\hat{g}(0)$ é uma métrica de curvatura seccional estritamente positiva e constante.

Demonstração

- Pelo teorema de Bonnet-Myers, segue que $\mathcal{N}$ é uma variedade fechada. Como já vimos anteriormente, $\mathcal{N}$ é então difeomorfa a $\mathcal{M}$.

- Pelo teorema de Bonnet-Myers, segue que $\mathcal{N}$ é uma variedade fechada. Como já vimos anteriormente, $\mathcal{N}$ é então difeomorfa a $\mathcal{M}$.
- Pela unicidade do fluxo, vemos que $\hat{g}(t) = (c-t)g_\infty$, onde g_∞ é um múltiplo positivo de $\hat{g}(0)$ e $c > 0$ é uma constante. Portanto

$$(\mathcal{M}, g_i(t), p_i) \to (\mathcal{M}, (c-t)g_\infty, p_\infty)$$

como queríamos mostrar.

Decomposição pela estrela de Hodge

Seja $(\mathcal{M}^4, g)$ *uma variedade Riemanniana orientada de dimensão quatro. Então o fibrado* $\Lambda^2(\mathcal{M})$ *das* 2*-formas em* $\mathcal{M}$ *admite a seguinte decomposição de autofibrados* $\star$*-invariantes:*

$$\Lambda^2(\mathcal{M}) = \Lambda^2_+(\mathcal{M}) \oplus \Lambda^2_-(\mathcal{M})$$

onde $\Lambda^2_\pm(\mathcal{M}) = \{\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M}) \mid \star\,\omega = \pm\omega\}$.

Decomposição de Rm

A decomposição em blocos correspondente à decomposição de $\Lambda^2(\mathcal{M})$ via a estrela de Hodge $\star$ do operador de curvatura é dada por

$$\mathrm{Rm} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\mathcal{W}^+ + \frac{\mathcal{S}}{12}\right)\Big|_{\Lambda^2_+(\mathcal{M})} & \mathcal{E}|_{\Lambda^2_-(\mathcal{M})} \\ \hline \mathcal{E}|_{\Lambda^2_+(\mathcal{M})} & \left(\mathcal{W}^- + \frac{\mathcal{S}}{12}\right)\Big|_{\Lambda^2_-(\mathcal{M})} \end{array}\right)$$

Dimensão quatro

- Após mudanças de escalas apropriadas, a mesma estratégia utilizada em dimensão três pode ser usada para mostrar que uma 4-variedade fechada $\mathcal{M}^4$ com operador de curvatura positivo admite uma métrica g_∞ cujo operador de curvatura é dado por

$$\mathrm{Rm} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 2 \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

  Em particular, Rm é um múltiplo de $g \owedge g$ e portanto $\mathcal{M}^4$ tem curvatura seccional constante. Em dimensão par as únicas tais variedades são esferas e espaços projetivos.

Dimensão quatro

- Após mudanças de escalas apropriadas, a mesma estratégia utilizada em dimensão três pode ser usada para mostrar que uma 4-variedade fechada $\mathcal{M}^4$ com operador de curvatura positivo admite uma métrica g_∞ cujo operador de curvatura é dado por

$$\mathrm{Rm} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 2 \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

  Em particular, Rm é um múltiplo de $g \owedge g$ e portanto $\mathcal{M}^4$ tem curvatura seccional constante. Em dimensão par as únicas tais variedades são esferas e espaços projetivos.
- Hamilton conjecturou que variedades fechadas de qualquer dimensão com operador de curvatura positivo são formas espaciais. Em [6], Böhm e Wilking confirmaram tal conjectura.

Em [2], Huai-Dong Cao provou o seguinte:

Um caso particular da conjectura de Calabi

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Kähler compacta com primeira classe de Chern definida $c_1(\mathcal{M})$. Se $c_1(\mathcal{M}) = 0$, então para qualquer métrica Kähler inicial g_0, a solução para o fluxo de Ricci normalizado existe para todo o tempo e converge para uma métrica Ricci-flat conforme $t \to \infty$. Se $c_1(\mathcal{M}) < 0$ e a métrica inicial g_0 é escolhida como um representante de $-c_1(\mathcal{M})$, então a solução para o fluxo de Ricci normalizado existe para todo o tempo e converge para uma métrica de Einstein de curvatura escalar negativa conforme $t \to \infty$. Se $c_1(\mathcal{M}) > 0$ e a métrica inicial g_0 é escolhida como um representante de $c_1(\mathcal{M})$, então a solução para o fluxo de Ricci normalizado existe para todo o tempo ***(mas em geral não converge para uma métrica de Einstein, existem obstruções!)***.

Referências

Referências

[1] **MathOverflow.** *Classification of surfaces and the TOP, DIFF and PL categories for manifolds*. mathoverflow.net/questions/96670.

[2] **Cao, Huai-Dong.** *Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds*. Invent. Math. **81** (1985), 359–372. MR 87d:58051.

[3] **Chow, Bennett; Lu, Peng; Ni, Lei.** *Hamilton's Ricci Flow*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press, New York, 2006.

Referências

[4] **Morgan, John W.** *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **42** (2005), no. 1, 57–78.

[5] **Chen, Xiuxiong; Lu, Peng; Tian, Gang.** *A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow*. Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 11, 3391–3393. MR2231924.

[6] **Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard.** *Manifolds with positive curvature operators are space forms*. Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 1079–1097. MR2415394.

Referências

[7] **Topping, Peter M.** *Lectures on the Ricci Flow*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. http://www.warwick.ac.uk/~maseq/RFnotes.html.

[8] **Cao, Huai-Dong; Zhu, Xi-Ping.** *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures: application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*. Asian J. Math. **10** (2006), no. 2, 165–492.

[9] **Chow, Bennett; Knopf, Dan.** *The Ricci Flow: An Introduction*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

Referências

[10] **Hamilton, Richard S.** *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.

[11] **Hamilton, Richard S.** *Four-manifolds with positive curvature operator*. J. Differential Geom. **24** (1986), no. 2, 153–179.

[12] **Weeks, Jeffrey R.** *The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds*. 2nd ed., Marcel Dekker, New York, 2002.

[13] **Luminet, Jean-Pierre; Weeks, Jeffrey R.; Riazuelo, Alain; Lehoucq, Roland; Uzan, Jean-Philippe.** *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background*. Nature **425** (2003), 593–595.

Referências

[14] **Horácio, Matheus.** *Um passeio histórico: de Eratóstenes a Perelman e a topologia do Universo*. Notas expositivas. horatiomarm.com/meus_textos/passeio.pdf.