manfredo p.
do carmo

geometria riemanniana

quinta edição
segunda impressão



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Copyright © 2015 by Manfredo P. do Carmo

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Gian Calvi Criação Visual Ltda / Sérgio R. Vaz

Projeto Euclides
Comissão Editorial:
Elon Lages Lima
S. Collier Coutinho
Paulo Sad

Títulos Publicados:

- Curso de Análise, Volume 1 - *Elon Lages Lima*
- Medida e Integração - *Pedro Jesus Fernandez*
- Aplicações da Topologia à Análise - *Chaim Samuel Hönig*
- Espaços Métricos - *Elon Lages Lima*
- Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais - *Djairo Guedes de Figueiredo*
- Introdução aos Sistemas Dinâmicos - *Jacob Palis Junior e Wellington C. de Melo*
- Introdução à Álgebra - *Adilson Gonçalves*
- Aspectos Teóricos da Computação - *Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos Simon e Tomasz Kowaltowski*
- Teoria Geométrica das Folheações - *Alcides Lins Neto e César Camacho*
- Geometria Riemanniana - *Manfredo P. do Carmo*
- Lições de Equações Diferenciais Ordinárias - *Jorge Sotomayor*
- Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário - *Barry R. James*
- Curso de Análise, Volume 2 - *Elon Lages Lima*
- Teoria Ergódica - *Ricardo Mañé*
- Teoria dos Números Algébricos - *Otto Endler*
- Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais - *Javier Thayer*
- Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução - *Rafael Iório Jr. e Valéria Iório*
- Álgebra: Um Curso de Introdução - *Arnaldo Leite P. Garcia e Yves Albert E. Lequain*
- Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento - *Elon Lages Lima*
- Funções de uma Variável Complexa - *Alcides Lins Neto*
- Elementos de Álgebra - *Arnaldo Garcia e Yves Lequain*
- Introdução à Geometria Analítica Complexa - *Marcos Sebastiani*
- Curso de Teoria da Medida - *Augusto Armando de Castro Júnior*
- Introdução à Medida e Integração- *Carlos Isnard*
- Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica - *Johann Baumeister e Antonio Leitão*
- Homologia Básica - *Elon Lages Lima*
- Teoria dos Números: um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro - *Fabio Brochero Martinez, Carlos Gustavo Moreira, Nicolau Saldanha e Eduardo Tengan*
- Introdução à Análise Funcional – *César R. de Oliveira*

Distribuição:
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro, RJ
e-mail: ddic@impa.br
http://www.impa.br

A S.S. Chern

Conteúdo

Prefácio da 1ª edição v
Prefácio da 2ª edição vii
Prefácio da 4ª edição viii
Prefácio da 5ª edição viii
Como usar este livro ix

0 Variedades Diferenciáveis 1
1 Introdução 1
2 Variedades diferenciáveis; espaço tangente 2
3 Imersões e mergulhos; exemplos 11
4 Outros exemplos de variedades. Orientação 15
5 Campos de vetores; colchetes. Topologia das variedades 26

I Métricas Riemannianas 38
1 Introdução 38
2 Métricas Riemannianas 41

II Conexões Afins; Conexão Riemanniana 53
1 Introdução 53
2 Conexões afins 55
3 Conexão Riemanniana 59

III Geodésicas; Vizinhanças Convexas 67
1 Introdução 67
2 O fluxo geodésico 68
3 Propriedades minimizantes das geodésicas 74

IV Curvaturas 98
1 Introdução 98
2 Curvatura 99
3 Curvatura seccional 104
4 Curvatura de Ricci e curvatura escalar 107

V Campos de Jacobi 122
1 Introdução 122
2 A equação de Jacobi 122
3 Pontos conjugados 129

VI Imersões Isométricas 137
1 Introdução 137
2 A segunda forma fundamental 138
3 As equações fundamentais de uma imersão isométrica 148

VII Variedades Completas; Os Teoremas de Hopf e Rinow e de Hadamard 159
1 Introdução 159
2 Variedades completas: Teorema de Hopf e Rinow 160
3 O teorema de Hadamard 165

VIII Espaços de Curvatura Constante 172
1 Introdução 172
2 Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica 174
3 O espaço hiperbólico 178
4 As formas espaciais 180
5 Isometrias do espaço hiperbólico 187

IX Variações da Energia 211
1 Introdução 211
2 Primeira e segunda variações da energia 212
3 Os teoremas de Bonnet-Myers e de Synge-Weinstein . 221

X O Teorema de Comparação de Rauch 232
1 Introdução 232
2 O teorema de Rauch 234
3 Aplicação do Lema do Índice à teoria das imersões .. 244
4 Pontos focais e uma extensão do teorema de Rauch . 250

XI O Teorema do Índice de Morse 267
1 Introdução 267
2 O teorema do Índice 267

XII O Grupo Fundamental das Variedades de Curvatura Negativa 279
1 Introdução 279
2 Existência de geodésicas fechadas 280
3 O teorema de Preissman 285

XIII O Teorema da Esfera **293**
1 Introdução 293
2 O lugar dos pontos mínimos (cut locus) 295
3 A estimativa do raio de injetividade 305
4 O teorema da esfera 312
5 Alguns desenvolvimentos posteriores 318

Referências **323**

Índice Remissivo **331**

Prefácio da 1ª edição

O objetivo deste livro é familiarizar o leitor com a linguagem básica e alguns resultados fundamentais da Geometria Riemanniana. Para evitar apelos a conhecimentos prévios de variedades diferenciáveis, foi incluido um Capítulo 0 que contém aqueles conceitos e resultados de variedades diferenciáveis que são utilizados de maneira essencial no restante do livro.

Os quatro primeiros capítulos do livro apresentam os conceitos básicos da Geometria Riemanniana (métricas Riemannianas, conexões Riemannianas, geodésicas e curvatura). Uma boa parte do estudo da Geometria Riemanniana consiste no entendimento das relações entre geodésicas e curvatura. Os campos de Jacobi, instrumento essencial para este entendimento, são introduzidos no Capítulo V. No Capítulo VI introduzimos a segunda forma fundamental associada a uma imersão isométrica, e demostramos uma generalização do Teorema Egregium de Gauss. Isto permite relacionar a noção de curvatura em variedades Riemannianas com o conceito clássico de curvatura Gaussiana em superfícies.

A partir do Capítulo VII iniciamos o estudo de questões globais. Demos ênfase às técnicas de Cálculo das Variações, que são apresentadas sem admitir conhecimentos prévios do assunto. Entre outros, demonstramos os Teoremas de Hadamard (Cap. VII), de Myers (Cap. IX) e de Synger (Cap. IX), os Teoremas de comparação de Rauch (Cap. X), e o Teorema do índice de Morse (Cap. XI). Uma das mais notáveis aplicações das técnicas de Cálculo das Variações, o Teorema da esfera, é apresentado no Capítulo XIII. Além disso, incluimos um teorema de "uniformização" para variedades de curvatura constante (Cap. VIII) e um estudo do grupo fundamental das variedades compactas de curvatura negativa (Cap. XII).

Muitos tópicos importantes estão ausentes. Por limitações de tempo e espaço, uma escolha era necessária; esperamos que as referências mencionadas em cada capítulo estimulem o leitor a completar os seus conhecimentos na direção de seu gosto pessoal.

Nossa dívida para com as fontes existentes (escritas e orais) é enorme e impossível de ser catalogada. Mencionamos apenas Chern [Ch 1], Klingenberg-Gromoll-Meyer [KGM] e Milnor [Mi] como influências principais.

Este livro teve origem em notas de um curso dado em Berkeley em 1968. Posteriormente, com a ajuda de alunos do IMPA, as notas foram traduzidas para o Português e publicadas na coleção de Monografias do IMPA em 1971. Finalmente, em uma forma muito próxima da atual, ele foi apresentado como um curso na Escola de Geometria Diferencial de Fortaleza em Julho de 1978. Ao longo de todos estes anos, vários colegas e alunos contribuiram com críticas e sugestões para a melhoria do texto. Destaco, de modo muito especial, minha gratidão ao professor Lucio Rodríguez que, em minha ausência se encarregou do enfadonho trabalho de corrigir as provas e organizar o índice alfabético. A todos, os meus sinceros agradecimentos.

MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO

Rio de Janeiro, junho de 1979

Prefácio da 2ª edição

Além de inúmeras correções e modificações ao longo do texto, esta segunda edição difere da primeira nos seguintes aspectos:

O Capítulo XIII foi inteiramente reescrito. Para benefício dos leitores pouco familiarizados com Teoria de Morse, a prova do teorema da esfera em dimensão par (que não depende de Teoria de Morse) pode ser lida de maneira independente.

No Capítulo IV foi introduzida uma exposição concisa sobre tensores em variedades Riemannianas. O objetivo é mostrar que, em variedades Riemannianas, tensores podem ser derivados covariantemente. Entre outras utilidades, isto permite introduzir no Capítulo VI as equações fundamentais de uma imersão isométrica.

No Capítulo VIII foi introduzida uma Secção sobre as isometrias do espaço hiperbólico e suas relações com as transformações conformes do espaço euclidiano.

O número de exercícios aumentou consideravelmente. Alguns assuntos que não encontraram lugar no texto, aparecem em forma de exercícios: submersões Riemannianas, o espaço projetivo complexo, as variedades de Einstein, a 2ª identidade de Bianchi, etc.

Não obstante o plano inicial, não foi possível incluir um capítulo sobre Equações Diferenciais Parciais e Geometria, o que terá de ficar para uma outra ocasião.

Resta-nos agradecer a uma enorme lista de pessoas que, através de correções, críticas e sugestões, contribuiram para melhorar este livro; agradecimentos especiais são devidos a Jonas Gomes, J. Gilvan de Oliveira e Gudlaugur Thorbergsson. Agradecimentos são também devidos ao Professor Lucio Rodríguez, que cuidou com dedicação do sistema TEX aqui utilizado, e ao Wilson Góes que se encarregou da apresentação final do texto.

Manfredo Perdigão do Carmo

Rio de Janeiro, 4 de julho de 1988

Prefácio da 4ª edição

Agradeço a Sofia Carolina de Costa Melo que garimpou cuidadosamente mais de uma centena de pequenos descuidos que escaparam na revisão da 3ª edição e foram corrigidos nesta edição. Agradeço também a Rogério Dias Trindade pela editoração da presente edição.

Rio de Janeiro, março de 2008

Manfredo Perdigão do Carmo

Prefácio da 5ª edição

Esta 5ª edição da Geometria Riemanniana fez-se necessária quando o resultado mais importante do livro, a saber, o Teorema da Esfera, havia recebido uma contribuição extraordinária com a solução completa de sua versão diferenciável por Simon Brendel e Richard Schoen [BrSc1]. O enunciado preciso do Teorema de Brendel e Schoen é descrito na última seção do Cap. XIII. Um esquema da prova, junto com referências e outras versões do Teorema da Esfera, é apresentado em [BrSc2].

No resto, fizemos várias correções, algumas das quais nos foram enviadas já há algum tempo por Florêncio Guimarães, a quem aproveitamos para agradecer estas e outras leituras críticas.

Rio de Janeiro, maio de 2011

Manfredo Perdigão do Carmo

Como usar este livro

Os pré-requisitos à leitura do livro são:

1) Um bom conhecimento de Cálculo, incluindo a formulação geométrica da noção de diferencial e o teorema da função inversa.
2) Uma certa familiaridade com elementos de Geometria Diferencial das superfícies. Por exemplo, os Capítulos 2 (2.1 e 2.4), 3 (3.2 e 3.3) e 4 (4.1 e 4.6) de M. do Carmo [dC 2] são suficientes.

Se o leitor for familiar com as definições básicas de variedades diferenciáveis, poderá omitir inteiramente o Capítulo 0. Caso contrário, tal capítulo deverá ser considerado como parte do curso.

A partir do Capítulo VI, se utilizam propriedades dos espaços de recobrimento e do grupo fundamental. Para os elementos de espaços de recobrimento, usamos o §5.6 do Capítulo 5 de M. do Carmo [dC 2], e para o grupo fundamental e suas relações com os espaços de recobrimento, usamos os Capítulos 2 e 5 de Massey [Ma].

Em alguns exercícios (nunca, porém, no texto) se utiliza um certo conhecimento de formas diferenciais. Os Capítulos 1, 2 e 3 de M. do Carmo [dC 4] são suficientes.

Os Capítulos de I a VII são indispensáveis ao resto do livro. A partir daí, um curso que visa o teorema da esfera, poderá omitir os Capítulos VIII e XII. Como uma alternativa, poderão ser omitidos os Capítulos VIII e XI e concluir o curso com o Capítulo XII. Um curso mínimo poderia conter os Capítulos de 0 a VII, a Seção 5.6 de M. do Carmo [dC 2], as Seções 1, 2 e 3 do Capítulo VIII e o Capítulo IX até (incluindo) o Teorema de Bonnet-Myers.

Capítulo 0

Variedades Diferenciáveis

1 Introdução

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. O primeiro exemplo de variedade accessível à nossa experiência é uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$. Recordemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para todo ponto $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\boldsymbol{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$, tais que:

(a) $\boldsymbol{x}$ é um homeomorfismo diferenciável;

(b) A diferencial $(d\boldsymbol{x})_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é biunívoca para todo $q \in U$ (v. M. do Carmo, [dC 2], Chap. 2).

A aplicação $\boldsymbol{x}$ é chamada uma parametrização de S em p.

A conseqüência mais importante da definição de superfície regular é o fato que a mudança de parametrizações é um difeomorfismo (M. do Carmo, [dC 2], §2.3. Cf. também o Exemplo 4.2 adiante). Mais precisamente, se $\boldsymbol{x}_\alpha: U_\alpha \to S$ e $\boldsymbol{x}_\beta: U_\beta \to S$ são duas parametrizações tais que $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, então as aplicações $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha: \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta: \boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ são diferenciáveis.

Deste modo, uma superfície regular é intuitivamente uma reunião de abertos do $\mathbb{R}^2$, organizados de tal modo que quando dois tais abertos se intersectam a transição de um para outro se faz de maneira diferenciável. Como conseqüência, tem sentido, em uma superfície regular, falar em funções diferenciáveis e aplicar aí os métodos do Cálculo Diferencial.

O maior defeito da definição de superfície regular é a sua dependência em relação ao $\mathbb{R}^3$. Com efeito, a idéia natural de superfície é a de um conjunto que seja bi-dimensional (em um certo sentido) e ao qual se possa aplicar o Cálculo Diferencial do $\mathbb{R}^2$; a presença desnecessária do $\mathbb{R}^3$ é simplesmente uma imposição de nossa natureza física.

Embora a necessidade de uma idéia abstrata de superfície (isto é, sem envolver um espaço ambiente) fosse entrevista desde Gauss ([Ga], pg. 21), foi necessário quase um século para que tal idéia atingisse a forma definitiva que apresentamos aqui. Uma das razões desta demora é que, mesmo para as superfícies do $\mathbb{R}^3$, o papel fundamental da mudança de parâmetros não era bem compreendido (Cf. Obs. 2.2 da próxima seção).

A definição explícita de variedade diferenciável será apresentada na próxima seção. Como não há vantagem alguma em nos restringirmos à dimensão dois, a definição será dada para uma dimensão n qualquer. Diferenciável significará sempre de classe C^∞.

2 Variedades diferenciáveis; espaço tangente

2.1 Definição. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

(1) $\bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) = M.$

(2) Para todo par α, β, com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ são diferenciáveis (Fig. 1).

(3) A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par $(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)$ (ou a aplicação $\boldsymbol{x}_\alpha$) com $p \in \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p; $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M.

A condição (3) comparece por razões puramente técnicas. Em verdade, dada uma estrutura diferenciável em M, podemos facilmente completá-la em uma máxima, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição (2). Portanto, com um certo abuso de linguagem, podemos dizer que uma variedade diferenciável é um conjunto munido de uma estrutura diferenciável. Em geral, a extensão à estrutura máxima será admitida sem maiores comentários.

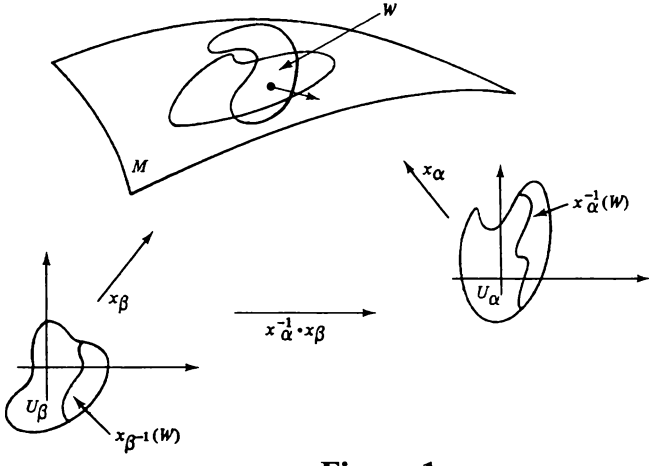


Figura 1

2.2 Observação. Uma comparação entre a Definição 2.1 e a definição de superfície regular em $\mathbb{R}^3$ mostra que o ponto essencial (a menos da mudança de 2 para n) foi destacar a propriedade fundamental da mudança de parâmetros (que é um teorema para superfície em $\mathbb{R}^3$) e colocá-la como axioma na condição 2 da Definição 2.1. Como logo veremos, esta é a condição que permite transportar para as variedades diferenciáveis todas as noções do Cálculo Diferencial do $\mathbb{R}^n$.

2.3 Observação. Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um *aberto* de M se $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(A \cap \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. É imediato verificar que M e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações $\boldsymbol{x}_\alpha$ são contínuas.

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável. Vejamos um exemplo não-trivial.

2.4 Exemplo. *O espaço projetivo real* $P^n(\mathbb{R})$. Indicaremos por $P^n(\mathbb{R})$ o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$; isto é, $P^n(\mathbb{R})$ é conjunto das "direções"de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vamos introduzir em $P^n(\mathbb{R})$ uma estrutura diferenciável. Para isto, seja $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observe, inicialmente, que $P^n(\mathbb{R})$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0;$$

os pontos de $P^n(\mathbb{R})$ serão indicados por $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Observe que, se $x_i \neq 0$,

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right].$$

Definamos em $P^n(\mathbb{R})$ subconjuntos $V_1, \ldots, V_{n+1}$, dados por:

$$V_i = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}];\ x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas do $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$. Vamos mostrar que podemos tomar os V_i's como vizinhanças coordenadas, onde as coordenadas em V_i são

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \quad y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para isto, definamos aplicações $\boldsymbol{x}_i \colon \mathbb{R}^n \to V_i$ por

$$\boldsymbol{x}_i(y_1, \ldots, y_n) = [y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n], \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

e mostremos que a família $\{(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_i)\}$ é uma estrutura diferenciável em $P^n(\mathbb{R})$.

Com efeito, cada aplicação $\boldsymbol{x}_i$ é evidentemente biunívoca e $\bigcup \boldsymbol{x}_i(\mathbb{R}^n) = P^n(\mathbb{R})$. Resta mostrar que $\boldsymbol{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x}_j^{-1} \circ \boldsymbol{x}_i$ é aí diferenciável, $j = 1, \ldots, n+1$. Ora, os pontos de $\boldsymbol{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n;\ y_j \neq 0\}.$$

Portanto $\boldsymbol{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e, supondo $i > j$ (o caso $i < j$ é análogo),

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_j^{-1} \circ \boldsymbol{x}_i(y_1, \ldots, y_n) &= \boldsymbol{x}_j^{-1}[y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n] \\
&= \boldsymbol{x}_j^{-1}\left[\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}\frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right] \\
&= \left(\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\right),
\end{aligned}$$

que é evidentemente diferenciável.

Em resumo, o espaço das direções de $\mathbb{R}^{n+1}$ (espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$ fica coberto por $n+1$ vizinhanças coordenadas V_i,

onde V_i é constituído pelas direções de $\mathbb{R}^{n+1}$ que não estão no hiperplano $x_i = 0$; além disto, em cada V_i temos coordenadas

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

onde $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ são as coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$. É usual, na terminologia clássica, chamar as coordenadas de V_i "coordenadas não-homogêneas" correspondentes às "coordenadas homogêneas" $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Antes de apresentarmos mais exemplos de variedades diferenciáveis, convém explorar um pouco mais as conseqüências da Definição 2.1. De agora em diante, quando indicarmos uma variedade por M^n, o índice superior n indicará a dimensão de M.

Primeiro, estenderemos a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

2.5 Definição. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi\colon M_1 \to M_2$ é *diferenciável em* $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\boldsymbol{y}\colon V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a aplicação

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1}$$

é diferenciável em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$ (Fig. 2). φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Decorre da condição (2) da Definição 2.1 que a definição dada é independente da escolha das parametrizações. A aplicação (1) é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

Em seguida, gostaríamos de estender às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente. É conveniente, mais uma vez, usar a nossa experiência com superfícies regulares do $\mathbb{R}^3$. Nas superfícies do $\mathbb{R}^3$, um vetor tangente em um ponto p da superfície é definido como a "velocidade" em $\mathbb{R}^3$ de uma curva da superfície passando por p. Como não dispomos do suporte de um espaço ambiente, precisamos achar uma propriedade característica do vetor tangente que substitua a noção de velocidade.

As considerações seguintes motivam a definição que daremos a seguir. Seja $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, com $\alpha(0) = p$. Escreva

$$\alpha(t) = (x_1(t)), \ldots, x_n(t)), t \in (-\varepsilon,\varepsilon), (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja agora f uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p. Podemos restringir f à curva α e escrever a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t=0} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_i x_i'(0)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f.$$

Portanto a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v. Esta é a propriedade característica que usaremos para definir vetor tangente em variedades.

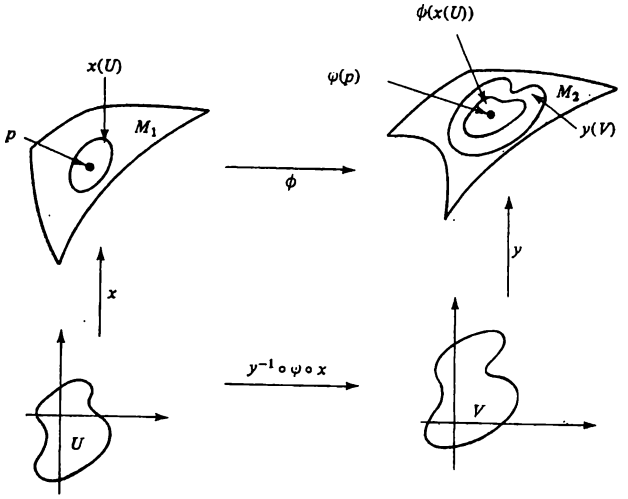


Figura 2

2.6 Definição. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O *vetor tangente à*

curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0)\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente em* p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Se escolhermos uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \to M^n$ em $p = \boldsymbol{x}(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ \boldsymbol{x}(q) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad q = (x_1, \ldots, x_n) \in U,$$

e

$$\boldsymbol{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α, obteremos

$$\begin{aligned}\alpha'(0)f &= \left.\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(x_1(t), \ldots, x_n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 = \left(\sum_i x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f.\end{aligned}$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização $\boldsymbol{x}$ por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0. \tag{2}$$

Observe que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada" (Fig. 3):

$$x_i \to \boldsymbol{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0).$$

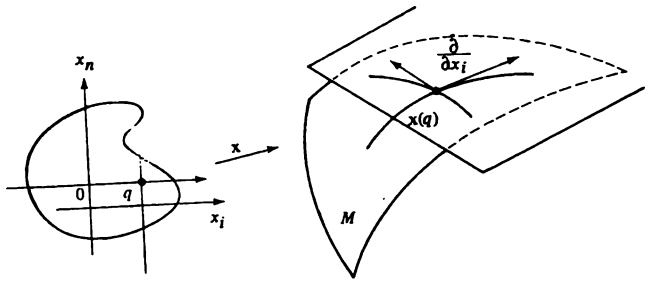


Figura 3

A expressão (2) mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também de (2) que o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \to M$ determina uma base *associada* $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_0\right\}$ em T_pM (Fig. 3). É imediato que a estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização $\boldsymbol{x}$. O espaço vetorial T_pM é chamado o *espaço tangente* de M em p.

Com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

2.7 Proposição. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciávveis e seja $\varphi\colon M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p\colon T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.* (Fig. 4).

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{x}\colon U \to M_1$ e $\boldsymbol{y}\colon V \to M_2$ parametrizações em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Exprimindo φ nestas parametrizações, podemos escrever

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n))$$

$$q = (x_1, \ldots, x_n) \in U, \quad (y_1, \ldots, y_m) \in V.$$

Por outro lado, exprimindo α na parametrização $\boldsymbol{x}$, obteremos

$$\boldsymbol{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Portanto,

$$\boldsymbol{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, y_m(x_1(t), \ldots, x_n(t))).$$

Decorre daí que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ de $T_{\varphi(p)}M_2$, associada à parametrização $\boldsymbol{y}$, é dada por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0)\right). \tag{3}$$

A relação (3) mostra imediatamente que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. Além disto, (3) pode ser escrita como

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x_j'(0)),$$
$$i = 1, \ldots, m; \qquad j = 1, \ldots, n,$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ indica uma matriz $m \times n$ e $x_j'(0)$ indica uma matriz coluna com n elementos. Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM_1 em $T_{\varphi(p)}M_2$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. □

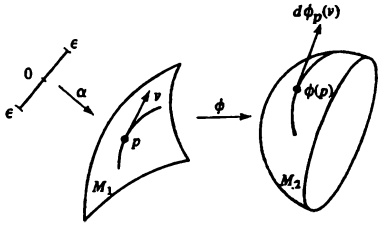


Figura 4

2.8 Definição. A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição 2.7 é chamada *diferencial* de φ em p.

2.9 Definição. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi\colon M_1 \to M_2$ é um *difeomorfismo* se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um *difeomorfismo local* em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi\colon U \to V$ é um difeomorfismo.

A noção de difeomorfismo é a noção natural de equivalência entre variedades diferenciáveis. É uma conseqüência imediata do teorema da função composta que se $\varphi\colon M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p\colon T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$; em particular as dimensões de M_1 e M_2 são iguais. Uma recíproca local deste fato é o seguinte teorema.

2.10 Teorema. *Seja $\varphi\colon M_1^n \to M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p\colon T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p.*

A demonstração é uma aplicação imediata do teorema da função inversa no $\mathbb{R}^n$.

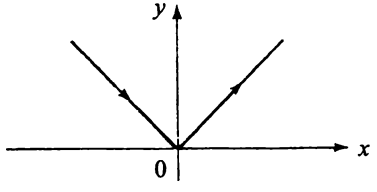


Figura 5

3 Imersões e mergulhos; exemplos

3.1 Definição. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi\colon M \to N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e

a inclusão $i\colon M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Observe-se que se $\varphi\colon M^m \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão φ.

3.2 Exemplo. A curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|)$ não é sequer diferenciável (Fig. 5).

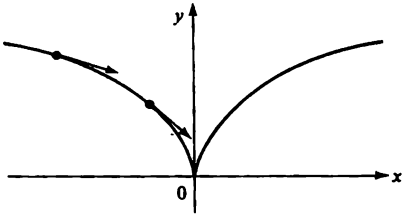


Figura 6

3.3 Exemplo. A curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ é uma aplicação diferenciável mas não é uma imersão. Com efeito, a condição de imersão neste caso é equivalente a que $\alpha'(t) \neq 0$, o que não ocorre para $t = 0$ (Fig. 6).

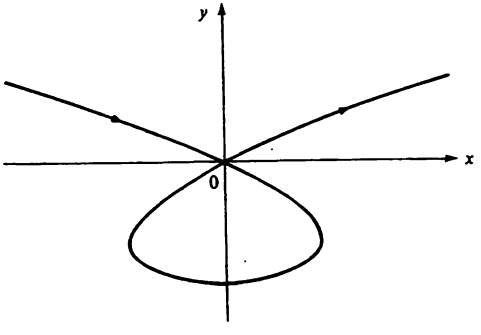


Figura 7

3.4 Exemplo. A curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ (Fig. 7) é uma imersão $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que possui uma auto-intersecção para $t = 0$. Portanto α não é um mergulho.

3.5 Exemplo. A curva (Fig. 8)

$$\alpha(t)\begin{cases} = (0, -(t+2)), & t \in (-3,-1], \\ = \text{ curva regular (v. Fig. 8)}, & t \in \left(-1, -\frac{1}{\pi}\right) \\ = \left(-t, -\operatorname{sen}\frac{1}{t}\right), & t \in \left[-\frac{1}{\pi}, 0\right) \end{cases}$$

é uma imersão $\alpha\colon (-3,0) \to \mathbb{R}^2$ sem auto-intersecções. Entretanto, α não é um mergulho. Com efeito, uma vizinhança, na topologia induzida por $\mathbb{R}^2$, de um ponto p na parte vertical da curva (Fig. 8) é constituida por uma infinidade de componentes conexas. Por outro lado, uma vizinhança de um tal ponto na topologia "induzida"por α (que é a topologia da reta) é um intervalo aberto, logo conexo.

3.6 Exemplo. É claro que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ possui uma estrutura diferenciável dada por suas parametrizações $\boldsymbol{x}_\alpha\colon U_\alpha \to S$. Com tal estrutura, as aplicações $\boldsymbol{x}_\alpha$ são diferenciáveis e, em verdade, são mergulhos de U_α em S; isto é uma conseqüência imediata das condições (a) e (b) da definição de superfície regular dada na Introdução. Vamos mostrar que a inclusão $i\colon S \subset \mathbb{R}^3$ é um mergulho, isto é, S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$.

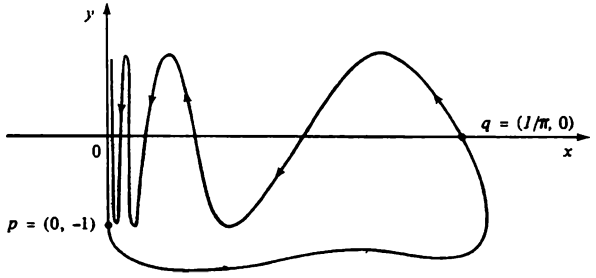


Figura 8

Com efeito, i é diferenciável, pois para todo $p \in S$ existe uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de S em p e uma parametrização $j\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to V$ de $\mathbb{R}^3$ em $i(p)$ (V é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ e

j é a aplicação identidade), tais que $j^{-1} \circ i \circ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ é diferenciável. Além disto, pela condição (b), i é uma imersão e, pela condição (a), i é um homeomorfismo sobre sua imagem, o que prova o afirmado.

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição que mostra ser toda imersão localmente (em um certo sentido) um mergulho.

3.7 Proposição. *Seja $\varphi\colon M_1^n \to M_2^m$, $n \leq m$, uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2. Para todo ponto $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi|V \to M_2$ é um mergulho.*

Demonstração: Este fato é uma conseqüência do teorema da função inversa. Sejam $\boldsymbol{x}_1\colon U_1 \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ e $\boldsymbol{x}_2\colon U_2 \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ sistemas de coordenadas em p em $\varphi(p)$, respectivamente, e indiquemos por $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e por $(y_1, \ldots, y_m)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^m$. Nestas coordenadas, a expressão de φ, isto é, a aplicação $\tilde{\varphi} = \boldsymbol{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x}_1$ pode ser escrita

$$\tilde{\varphi} = (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Seja $q = \boldsymbol{x}_1^{-1}(p)$. Como φ é uma imersão, podemos supor, renumerando as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ se necessário, que

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Para aplicar o teorema da função inversa, introduzamos uma aplicação $\phi = U_1 \times \mathbb{R}^{m-n=k} \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$\begin{aligned} &\phi(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_k) = \\ &= (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n), y_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) + t_1, \\ &\qquad \ldots, y_{n+k}(x_1, \ldots, x_n) + t_k), \end{aligned}$$

onde $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{m-n=k}$. É imediato verificar que ϕ restrito a U_1 coincide com $\tilde{\varphi}$ e que

$$\det(d\phi_q) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(q) \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças $W_1 \subset U_1 \times \mathbb{R}^k$ de q e $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ de $\phi(q)$ tais que a restrição $\phi|W_1$ é um difeomorfismo sobre W_2. Seja $\widetilde{V} = W_1 \cap U_1$. Como $\phi|\widetilde{V} = \tilde{\varphi}|\widetilde{V}$ e $\boldsymbol{x}_i$ é um difeomorfismo, $i = 1, 2$, concluimos que a restrição a $V = \boldsymbol{x}_1(\widetilde{V})$ da aplicação $\phi = \boldsymbol{x}_2 \circ \tilde{\varphi} \circ \boldsymbol{x}_1^{-1} \colon V \to \varphi(V) \subset M_2$ é um difeomorfismo, donde um mergulho. □

4 Outros exemplos de variedades. Orientação

4.1 Exemplo. (O fibrado tangente). Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Vamos munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$); com tal estrutura TM será chamado *fibrado tangente* de M. Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades, como no caso da Mecânica.

Seja $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M. Indicaremos por $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α, defina

$$\boldsymbol{y}_\alpha \colon U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM,$$

por

$$\boldsymbol{y}_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) =$$

$$= \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), \ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas de v na base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$.

Vamos mostrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM. Como $\bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(d\boldsymbol{x}_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\boldsymbol{x}_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, teremos que

$$\bigcup_\alpha \boldsymbol{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

o que verifica a condição 1 da Definição 2.1. Seja agora

$$(p, v) \in \boldsymbol{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (\boldsymbol{x}_\alpha(q_\alpha), d\boldsymbol{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\boldsymbol{x}_\beta(q_\beta), d\boldsymbol{x}_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= \boldsymbol{y}_\beta^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha(q_\alpha), d\boldsymbol{x}_\alpha(v_\alpha)) = \\ &= ((\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha)(q_\alpha),\ d(\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha)(v_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ é diferenciável, $d(\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $\boldsymbol{y}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{y}_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição 2 da Definição 2.1 e conclui o exemplo.

4.2 Exemplo. (*Superfícies regulares do* $\mathbb{R}^n$). A generalização natural da idéia de superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é a noção de superfície de dimensão k em $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$. Um subconjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma *superfície regular de dimensão* k se para cada $p \in M^k$ existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$ tais que:

(a) $\boldsymbol{x}$ é um homeomorfismo diferenciável.

(b) $(d\boldsymbol{x})_q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

A menos das dimensões envolvidas, a definição é exatamente a mesma que foi dada para superfícies regulares do $\mathbb{R}^3$ na Introdução.

De maneira análoga a que se faz para superfície do $\mathbb{R}^3$ (M. do Carmo [dC 2], pg. 71), prova-se que se $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M^k$ e $\boldsymbol{y}\colon V \subset \mathbb{R}^k \to M^k$ *são duas parametrizações com* $\boldsymbol{x}(U) \cap \boldsymbol{y}(V) =$

$W \neq \phi$, então a aplicação $h = \boldsymbol{x}^{-1} \circ \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{y}^{-1}(W) \to \boldsymbol{x}^{-1}(W)$ é um difeomorfismo. Por completação, daremos a seguir um esquema desta demonstração.

Primeiro, observamos que h é um homeomorfismo como composta de homeomorfismos. Seja $r \in \boldsymbol{y}^{-1}(W)$ e faça $q = h(r)$. Sejam $(u_1, \ldots, u_k) \in U$ e $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, e escreva $\boldsymbol{x}$ nestas coordenadas como

$$\boldsymbol{x}(u_1, \ldots, u_k) = (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k)).$$

Pela condição (b), podemos supor que

$$\frac{\partial(v_1, \ldots, v_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Estendamos $\boldsymbol{x}$ a uma aplicação $F \colon U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} &F(u_1, \ldots, u_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) \\ &= (v_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, v_k(u_1, \ldots, u_k), v_{k+1}(u_1, \ldots, u_k) \\ &\qquad + t_{k+1}, \ldots, v_n(u_1, \ldots, u_k) + t_n), \end{aligned}$$

onde $(t_{k+1}, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. É claro que F é diferenciável e a restrição de F a $U \times \{(0, \ldots, 0)\}$ coincide com $\boldsymbol{x}$. Por um cálculo simples, obteremos que

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(v_1, \ldots, v_k)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança Q de $\boldsymbol{x}(q)$ onde F^{-1} existe e é diferenciável. Por continuidade de $\boldsymbol{y}$, existe uma vizinhança $R \subset V$ de r tal que $\boldsymbol{y}(R) \subset Q$. Note que, restrita a $R, h|R = F^{-1} \circ y|R$ é uma composição de aplicações diferenciáveis. Logo h é diferenciável em r, donde em $\boldsymbol{y}^{-1}(W)$. Um argumento semelhante mostraria que h^{-1} é também diferenciável, como queríamos provar. □

Do resultado que acabamos de provar, decorre, por um argumento inteiramente análogo ao do Exemplo 3.6 que M^k é uma variedade diferenciável de dimensão k e que a inclusão $i\colon M^k \subset \mathbb{R}^n$ é um mergulho, isto é, M^k é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$.

4.3 Exemplo. (*Imagem inversa de um valor regular*). Para o exemplo que se segue, precisamos de algumas definições.

Seja $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável de um aberto U do $\mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in U$ é um *ponto crítico* de F se a diferencial $dF_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva. A imagem $F(p)$ de um ponto crítico é chamada um *valor crítico* de F. Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado um *valor regular* de F. Note que qualquer ponto $a \notin F(U)$ é trivialmente um valor regular de F e que se existe um valor regular de F em $\mathbb{R}^n$, então $n \geq m$.

Seja agora $a \in F(U)$ um valor regular de F. Vamos mostrar que a *imagem inversa* $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ é uma *superfície regular de dimensão* $n-m=k$. Pelo que foi visto no Exemplo 4.2, $F^{-1}(a)$ é então uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$.

Para provar o afirmado, usaremos mais uma vez o teorema da função inversa. Seja $p \in F^{-1}(a)$. Indiquemos por $q = (y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_k)$ um ponto de $\mathbb{R}^{n=m+k}$ e por $F(q) = (f_1(q), \ldots, f_m(q))$ a aplicação F. Como a é um valor regular de F, dF_p é sobrejetiva. Podemos, portanto, supor que

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(p) \neq 0.$$

Definamos uma aplicação $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n=m+k}$ por

$$\varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_k) = (f_1(q), \ldots, f_m(q), x_1, \ldots, x_k).$$

Então

$$\det(d\varphi)_p = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(p) \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, φ é um difeomorfismo de uma vizinhança Q de p sobre uma vizinhança W de $\varphi(p)$. Seja $K^{m+k} \subset$

$W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ um cubo de centro $\varphi(p)$ e faça $V = \varphi^{-1}(K^{m+k}) \cap Q$. Então φ aplica a vizinhança V difeomorficamente sobre $K^{m+k} = K^m \times K^k$. Defina uma aplicação $\boldsymbol{x}\colon K^k \to V$ por

$$\boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_k) = \varphi^{-1}(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_k),$$

onde $(a_1, \ldots, a_m) = a$. É imediato verificar que φ satisfaz às condições (a) e (b) da definição de superfície regular dada no Exemplo 4.2. Como p é arbitrário, $F^{-1}(a)$ é uma superfície regular do $\mathbb{R}^n$, como havíamos afirmado.

Antes de passarmos a outros exemplos de variedades diferenciáveis, convém introduzir a importante noção global de orientação.

4.4 Definição. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ tal que:

(i) para todo par α, β, com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\boldsymbol{x}_\beta \circ \boldsymbol{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é *não-orientável.* Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma *orientação* de M e M é, então, *orientada.* Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda satisfaz (i).

Não é difícil verificar que se M é orientável e conexa existem exatamente duas orientações distintas em M.

Sejam agora M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $\varphi\colon M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. É imediato verificar que M_1 é orientável se e só se M_2 é orientável. Se, além disto, M_1 e M_2 são conexas e estão orientadas, φ induz uma orientação em M_2 que pode ou não coincidir com a orientação inicial de M_2. No primeiro caso, diz-se que φ *preserva a orientação* e no segundo, que φ *reverte a orientação.*

4.5 Exemplo. *Se M pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas V_1 e V_2 de modo que a intersecção $V_1 \cap V_2$ é conexa,*

então M é orientável. Pois, como o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas é $\neq 0$, ele não muda de sinal em $V_1 \cap V_2$; se é negativo em um ponto, basta trocar o sinal de uma das coordenadas para que ele passe a positivo neste ponto, donde em $V_1 \cap V_2$.

4.6 Exemplo. O simples critério do exemplo anterior pode ser usado para mostrar que a esfera

$$S^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é orientável. Com efeito, seja $N = (0, \ldots, 0, 1)$ o pólo norte e $S = (0, \ldots, 0, -1)$ o pólo sul de S^n. Defina uma aplicação $\pi_1 \colon S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$ (*projeção estereográfica a partir do pólo norte*) que leva $p = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $S^n - \{N\}$ na intersecção do hiperplano $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N. É imediato verificar que (Fig. 9)

$$\pi_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

A aplicação π_1 é diferenciável, injetiva e aplica $S^n - \{N\}$ sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. A projeção estereográfica $\pi_2 \colon S^n - \{S\} \to \mathbb{R}^n$ a partir do pólo sul sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$ possui as mesmas propriedades.

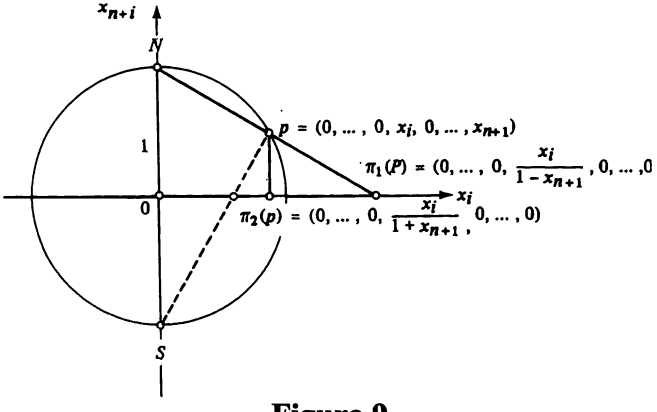


Figura 9

Portanto, as parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1})$, $(\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$ cobrem S^n. Além disto, a mudança de coordenadas:

$$y_j = \frac{x_j}{1 - x_{n+1}} \mapsto y'_j = \frac{x_j}{1 + x_{n+1}},$$
$$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

é dada por

$$y'_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

(aqui usamos o fato que $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1$). Portanto, a família $\{(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})\}$ é uma estrutura diferenciável em S^n. Observe que a intersecção $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n - \{N \cup S\}$ é conexa, logo S^n é orientável e a família dada determina uma orientação de S^n.

Seja agora $A\colon S^n \to S^n$ a aplicação antípoda dada por $A(p) = -p$, $p \in \mathbb{R}^{n+1}$. A é diferenciável e $A^2 = \text{ident}$. Portanto A é um difeomorfismo de S^n. Observe que quando n é par, A reverte a orientação de S^n e quando n é ímpar, A preserva a orientação de S^n.

Estamos agora em condições de apresentar outros exemplos de variedades diferenciáveis.

4.7 Exemplo. (*Outra apresentação do espaço projetivo*). O conjunto $P^n(\mathbb{R})$ das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem pode ser pensado como o espaço quociente da esfera unitária $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; |p| = 1\}$ pela relação de equivalência que identifica $p \in S^n$ com o seu ponto antípoda $A(p) = -p$. Com efeito, cada reta que passa pela origem determina na esfera dois pontos antípodas e a correspondência assim obtida é evidentemente biunívoca e sobrejetiva.

Levando em conta este fato vamos introduzir uma outra estrutura diferenciável em $P^n(\mathbb{R})$ (Cf. Exemplo 2.4). Para isto, introduziremos inicialmente em $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma estrutura de

superfície regular, definindo parametrizações

$$x_i^+ : U_i \to S^n, \quad x_i^- : U_i \to S^n, \qquad i = 1, \ldots, n+1,$$

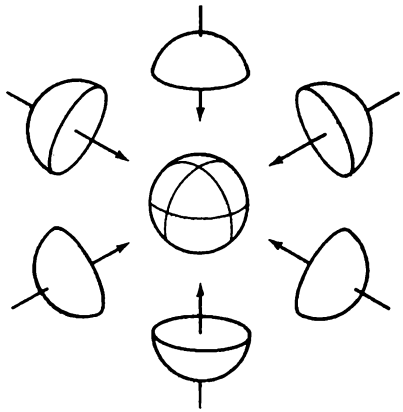


Figura 10

obtidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} U_i &= \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i = 0, \\ &\qquad x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < 1\}, \\ x_i^+(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) &= (x_1, \ldots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}), \\ x_i^-(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) &= (x_1, \ldots, x_{i-1}, -D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

onde $D_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2)}$. É imediato verificar que as condições (a) e (b) da definição do Exemplo 4.2 são satisfeitas. Portanto, a família

$$\{(U_i, \boldsymbol{x}_i^+), (U_i, \boldsymbol{x}_i^-)\}, \quad i = 1, \ldots, n+1$$

é uma estrutura diferenciável em S^n. Geometricamente, isto equivale a cobrir a esfera S^n com vizinhanças coordenadas que são semi-esferas perpendiculares aos vários eixos x_i e tomar como

coordenadas em, por exemplo, $\boldsymbol{x}_i^+(U_i)$, as coordenadas da projeção ortogonal de $\boldsymbol{x}_i^+(U_i)$ sobre o hiperplano $x_i = 0$ (Fig. 10).

Seja $\pi\colon S^n \to P^n(\mathbb{R})$ a projeção canônica, isto é, $\pi(p) = \{p, -p\}$; observe que $\pi(\boldsymbol{x}_i^+(U_i)) = \pi(\boldsymbol{x}_i^-(U_i))$. Vamos definir uma aplicação $\boldsymbol{y}_i\colon U_i \to P^n(\mathbb{R})$ por

$$\boldsymbol{y}_i = \pi \circ \boldsymbol{x}_i^+ .$$

Como π restrito a $\boldsymbol{x}_i^+(U_i)$ é biunívoca, temos que

$$\boldsymbol{y}_i^{-1} \circ \boldsymbol{y}_j = (\pi \circ \boldsymbol{x}_i^+)^{-1} \circ (\pi \circ \boldsymbol{x}_j^+) = (\boldsymbol{x}_i^+)^{-1} \circ \boldsymbol{x}_j^+ ,$$

donde a diferenciabilidade de $\boldsymbol{y}_i^{-1} \circ \boldsymbol{y}_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, n+1$. Decorre daí que a família $\{(U_i, \boldsymbol{y}_i)\}$ é uma estrutura diferenciável de $P^n(\mathbb{R})$.

Em verdade, esta estrutura diferenciável e a do Exemplo 2.4 dão origem a uma mesma estrutura máxima. Com efeito, as vizinhanças coordenadas são as mesmas e a mudança de coordenadas é dada por:

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$$

que, como $x_i \neq 0$ e $D_i \neq 0$, é diferenciável.

Como veremos no Exercício 9, $P^n(\mathbb{R})$ é orientável se e só se n é ímpar.

4.8 Exemplo. (*Ação descontínua de um grupo*). Uma maneira de construir variedades diferenciáveis, que generaliza o processo acima, é dada pelas seguintes considerações.

Diz-se que um grupo G *age em uma variedade diferenciável* M se existe uma aplicação $\varphi\colon G \times M \to M$ tal que:

(i) Para cada $g \in G$, a aplicação $\varphi_g\colon M \to M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$ é um difeomorfismo, e $\varphi_e =$ identidade.

(ii) Se $g_1, g_2 \in G$, $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

É freqüente, quando estamos tratando de uma única ação, indicar $\varphi(g,p) = gp$; com isto, a condição (ii) se escreve como uma espécie de associatividade: $(g_1g_2)p = g_1(g_2p)$.

Diz-se que uma ação é *propriamente descontínua* se todo $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $U \cap g(U) = \emptyset$ para todo $g \neq e$.

Quando G age sobre M, a ação determina uma relação de equivalência $\sim$ em M, onde $p_1 \sim p_2$ se e só se $p_2 = gp_1$, para algum $g \in G$. Indicaremos o espaço quociente de M por esta relação de equivalência por M/G. A aplicação $\pi\colon M \to M/G$, dada por

$$\pi(p) = \text{ classe de equivalência de } p = Gp$$

será chamada a *projeção* de M em M/G.

Seja agora M uma variedade diferenciável e seja $G \times M \to M$ uma ação propriamente descontínua de um grupo G em M. Vamos mostrar que M/G possui uma estrutura diferenciável de modo que a projeção $\pi\colon M \to M/G$ é um difeomorfismo local.

Para cada $p \in M$ escolha uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon V \to M$ em p de modo que $\boldsymbol{x}(V) \subset U$, onde $U \subset M$ é uma vizinhança de p tal que $U \cap g(U) = \emptyset$, $g \neq e$. É claro que $\pi|U$ é injetiva, donde $\boldsymbol{y} = \pi \circ \boldsymbol{x}\colon V \to M/G$ é também injetiva. A família $\{(V,\boldsymbol{y})\}$ evidentemente cobre M/G; para que tal família seja uma estrutura diferenciável, basta mostrar que dadas duas aplicações $\boldsymbol{y}_1 = \pi \circ \boldsymbol{x}_1\colon V_1 \to M/G$ e $\boldsymbol{y}_2 = \pi \circ \boldsymbol{x}_2\colon V_2 \to M/G$ com $\boldsymbol{y}_1(V_1) \cap \boldsymbol{y}_2(V_2) \neq \emptyset$, então $\boldsymbol{y}_1^{-1} \circ \boldsymbol{y}_2$ é diferenciável.

Para isto, seja π_i a restrição de π a $x_i(V_i)$, $i = 1,2$. Seja $q \in \boldsymbol{y}_1(V_1) \cap \boldsymbol{y}_2(V_2)$ e seja $r = \boldsymbol{x}_2^{-1} \circ \pi_2^{-1}(q)$. Seja ainda $W \subset V_2$ uma vizinhança de r tal que $(\pi_2 \circ \boldsymbol{x}_2)(W) \subset \boldsymbol{y}_1(V_1) \cap \boldsymbol{y}_2(V_2)$ (Fig. 11). Então, restrita a W,

$$\boldsymbol{y}_1^{-1} \circ \boldsymbol{y}_2 \mid W = \boldsymbol{x}_1^{-1} \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ \boldsymbol{x}_2\,.$$

Basta, portanto, mostrar que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ é diferenciável em $p_2 = \pi_2^{-1}(q)$. Seja $p_1 = \pi_1^{-1} \circ \pi_2(p_2)$. Então p_1 e p_2 são equivalentes em M, donde existe $g \in G$ tal que $gp_2 = p_1$. É imediato verificar

que a restrição $\pi_1^{-1} \circ \pi_2 \mid \boldsymbol{x}_2(W)$ coincide com o difeomorfismo $\varphi_g \mid \boldsymbol{x}_2(W)$, o que prova que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ é diferenciável em p_2, como queríamos.

Pela própria maneira como foi construida, esta estrutura diferenciável é tal que $\pi\colon M \to M/G$ é um difeomorfismo local. Um critério de orientabilidade de M/G é dado no Exercício 9. Observe que a situação do exemplo anterior se reduz à presente, se tomarmos $M = S^n$ e G o grupo de difeomorfismos do S^n constituido pela aplicação antípoda A e a identidade $I = A^2$ de S^n.

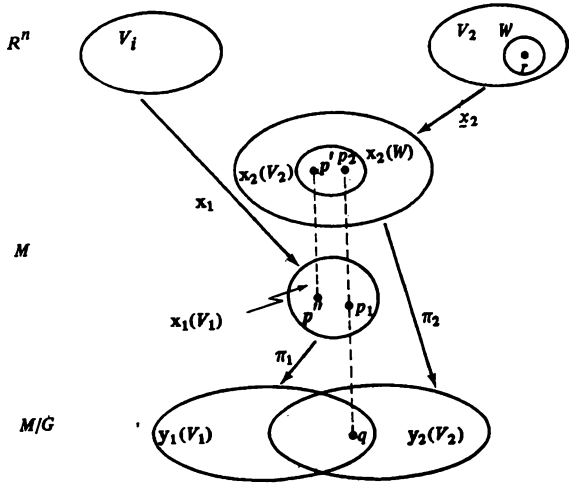


Figura 11

4.9 Exemplo. (Casos particulares do Exemplo 4.8).
4.9 (a). Considere o grupo G das translações "inteiras" do $\mathbb{R}^k$ onde a ação de G em $\mathbb{R}^k$ é dada por

$$G(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 + n_1, \ldots, x_k + n_k), \quad n_1, \ldots, n_k \in Z,$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

É imediato verificar que a aplicação acima define uma ação propriamente descontínua de G em $\mathbb{R}^k$. O espaço quociente $\mathbb{R}^k/G$,

com a estrutura diferenciável descrita no Exemplo 4.8, é chamado o *k-toro* T^k. Quando $k = 2$, o 2-toro T^2 é difeomorfo ao toro de revolução de $\mathbb{R}^3$ obtido como imagem inversa do zero da função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 - r^2.$$

(Cf. M. do Carmo [dC 2], pg. 62).

4.9 (b). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$, simétrica em relação à origem $0 \in \mathbb{R}^3$, isto é, se $p \in S$ então $-p = A(p) \in S$. O grupo de difeomorfismos de S constituido por $\{A, Id.\}$ age em S de maneira propriamente descontínua. Introduzamos em S/G a estrutura diferenciável dada pelo Exemplo 4.8. Quando S é o toro de revolução T^2, $S/G = K$ é chamada a *garrafa de Klein*; quando S é a faixa do cilindro circular reto dada por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1,\ -1 < z < 1\}$, S/G é chamada a *faixa de Möbius*. Como veremos no Exercício 9, a garrafa de Klein e a faixa de Möbius são não-orientáveis. No Exercício 6, indicaremos como a garrafa de Klein pode ser mergulhda em $\mathbb{R}^4$.

5 Campos de vetores; colchetes. Topologia das variedades

5.1 Definição. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM (v. Exemplo 4.1). O campo é *diferenciável* se a aplicação $X\colon M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{4}$$

onde cada $a_i: U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a $\boldsymbol{x}$, $i = 1, \ldots, n$. É claro que X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida por (4) e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X: \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ do conjunto $\mathcal{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathcal{F}$ das funções em M, definida do seguinte modo

$$(5) \qquad (Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in \mathcal{D},$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrização $\boldsymbol{x}$. Em verdade, esta idéia de vetor como derivada direcional foi precisamente a maneira como definimos a noção de vetor tangente. Como é imediato verificar, a função Xf obtida em (5) não depende da escolha da parametrização $\boldsymbol{x}$. Neste contexto, é imediato verificar que X é diferenciável se e só se $X: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

Observe que se $\varphi: M \to M$ é um difeomorfismo, $v \in T_pM$ e f é uma função diferenciável em uma vizinhança de $\varphi(p)$, teremos

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = v(f \circ \varphi)(p).$$

De fato, seja $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável com $\alpha'(0) = v$, $\alpha(0) = p$. Então

$$(d\varphi(v)f)\varphi(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)\Big|_{t=0} = v(f \circ \varphi)(p).$$

A interpretação de X com um operador em $\mathcal{D}$ permite-nos considerar os iterados de X. Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f: M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, podemos afirmar o seguinte.

5.2 Lema. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demonstração: Primeiro provaremos que se Z existe, ele é único. Admitamos, portanto, a existência de um tal Z. Seja $p \in M$ e $\boldsymbol{x}\colon U \to M$ uma parametrização em p, e sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de X e Y nesta parametrização. Então para todo $f \in \mathcal{D}$,

$$XYf = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$YXf = Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto, Z é dado, na parametrização $\boldsymbol{x}$, por

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

o que mostra a unicidade de Z.

Para a demonstração da existência, defina-se Z_α em cada vizinhança coordenada $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ de M pela expressão anterior. Por unicidade, $Z_\alpha = Z_\beta$ em $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, o que permite definir Z em toda a variedade M. □

O campo vetorial Z dado pelo Lema 5.2 é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

5.3 Proposição. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*),

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*),

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*),

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração: (a) e (b) são imediatos. Para demonstrar (c), basta observar que, por um lado,

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ + YZX - YXZ - ZXY + XZY.\end{aligned}$$

Como os segundos membros das expressões acima são iguais, concluimos (c) usando (a).

Finalmente, para demonstrar (d), calculamos

$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)X - gY(f)X.\end{aligned}$$

□

O colchete $[X, Y]$ pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias"de X. Para descrever esta interpretação, precisamos de alguns preliminares sobre equações diferenciais.

Como uma variedade diferenciável é localmente difeomorfa a um $\mathbb{R}^n$, o teorema fundamental de existência, unicidade e dependência das condições iniciais das equações diferenciais ordinárias (que é um teorema local) se estende naturalmente às variedades diferenciáveis. Para uso posterior, convém enunciá-lo

explicitamente. O leitor pouco familiarizado com equações diferenciais poderá admitir o enunciado abaixo, que é tudo que precisaremos.

Seja X um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável M, e seja $p \in M$. Então existem uma vizinhança $U \subset M$ de p, um intervalo $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, e uma aplicação diferenciável $\varphi\colon (-\delta, \delta) \times U \to M$ tais que a curva $t \to \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in U$, é a única curva que satisfaz $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$ e $\varphi(0, q) = q$.

Uma curva $\alpha\colon (-\delta, \delta) \to M$ que satisfaz às condições $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = q$ é chamada a *trajetória* do campo X que passa por q para $t = 0$. O teorema acima garante que por cada ponto de uma certa vizinhança passa uma única trajetória de X e que a aplicação assim obtida depende diferenciavelmente de t e da "condição inicial" q. É comum utilizar a notação $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ e chamar $\varphi_t\colon U \to M$ o *fluxo local* de X.

A interpretação acima mencionada do colchete $[X, Y]$ está contida na seguinte proposição.

5.4 Proposição. *Sejam X, Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M, seja $p \in M$, e seja φ_t o fluxo local de X em uma vizinhança U de p. Então*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [Y - d\varphi_t Y](\varphi_t(p)).$$

Precisamos do seguinte lema de Cálculo.

5.5 Lema *Seja $h\colon (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável com $h(0, q) = 0$ para todo $q \in U$. Então existe uma aplicação diferenciável $g\colon (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ com $h(t, q) = tg(t, q)$; em particular,*

$$g(0, q) = \left. \frac{\partial h(t, q)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Prova do Lema: Basta definir

$$g(t, q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts, q)}{\partial (ts)}\, ds$$

e observar que

$$tg(t,q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\, d(ts) = h(t,q).$$

Prova da Proposição: Seja f uma função diferenciável em uma vizinhança de p. Faça

$$h(t,q) = f(\varphi_t(q)) - f(q),$$

e aplique o lema para obter uma função diferenciável $g(t,q)$, tal que

$$f \circ \varphi_t(q) = f(q) + tg(t,q) \quad \text{e} \quad g(0,q) = Xf(q).$$

Decorre daí que

$$((d\varphi_t Y)f)(\varphi_t(p)) = (Y(f \circ \varphi_t))(p) = Yf(p) + t(Yg(t,p)).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,[Y - d\varphi_t Y]f(\varphi_t p) &= \lim_{t\to 0} \frac{(Yf)(\varphi_t p) - Yf(p)}{t} - (Yg(0,p)) \\ &= (X(Yf))(p) - (Y(Xf))(p) \\ &= ((XY - YX)f)(p) \\ &= ([X,Y]f)(p).\end{aligned}$$

□

Até agora não fizemos restrição alguma quanto a topologia das variedades diferenciáveis. Em verdade, a topologia natural de uma variedade pode ser bastante estranha. Em particular, pode acontecer que um (ou ambos) dos seguintes axiomas não seja satisfeito:

A) *Axioma de Hausdorff*: Dados dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

B) *Axioma da base enumerável*: M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que M *tem base enumerável*).

O Axioma A é essencial à unicidade do limite de uma sucessão convergente e o Axioma B é essencial à existência de uma partição diferenciável da unidade, instrumento quase indispensável ao estudo de certas questões sobre variedades. (Em verdade, se M é conexa, os Axiomas A e B são equivalentes à existência de partição da unidade; V. Teorema 5.6 adiante.)

Por exemplo, uma questão natural na teoria das variedades diferenciáveis é saber se uma dada variedade pode ser imersa ou mergulhada em algum espaço euclidiano. Um resultado fundamental nesta direção é o famoso teorema de Whitney que afirma o seguinte: *Toda variedade diferenciável (de Hausdorff e com base enumerável!) de dimensão n pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$ e mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$*, (em verdade, o teorema pode ser refinado para $\mathbb{R}^{2n-1}$, $n > 1$, e $\mathbb{R}^{2n}$, respectivamente). Uma demonstração deste teorema escapa à finalidade desta introdução e pode ser encontrada em E.L. Lima [Li 2].

A título de informação, mencionaremos sem demonstração um teorema de existência de partição da unidade. Necessitaremos de algumas definições.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \phi$ apenas para um número finito de índices. O *suporte* de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero.

Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha\colon M \to \mathbb{R}$ é uma *partição diferenciável da unidade* se:

(1) Para todo α, $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \boldsymbol{x}_\beta)\}$ de M.

(2) A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.

(3) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$ (esta condição faz sentido, pois em cada p, $f_\alpha(p) \neq 0$ para apenas um número finito de índices).

Costuma-se dizer que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está *subordinada à cobertura* $\{V_\alpha\}$.

5.6 Teorema. *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se e só se toda componente conexa de M é de Hausdorff e tem base enumerável.*

Para uma demonstração v. F. Brickell e R.S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London 1970, Chap. 3.

5.7 Observação. Lembremos que dados $p \in \mathbb{R}^n$ e uma bola aberta $B_r(p) \subset \mathbb{R}^n$ centrada em p e de raio r, existe uma vizinhança U de p com $\overline{U} \subset B_r(p)$ e uma função diferenciável $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $0 \leq f(q) \leq 1$ para todo $q \in \mathbb{R}^n$ e

$$f(q) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad q \in \overline{U}, \\ 0, & \text{se} \quad q \notin B_r(p). \end{cases}$$

Com efeito, se tomarmos, por simplicidade, $r = 3$, podemos escolher $U = B_1(p)$ e definir f como $f(q) = \beta(-|p-q|)$, $q \in \mathbb{R}^n$, onde $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\beta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} \alpha(s)\, ds}{\int_{-2}^{-1} \alpha(s)\, ds},$$

e $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função diferenciável que é igual a $\exp \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$ em $[-2,-1]$ e zero fora deste intervalo. É imediato verificar que f satisfaz às condições requeridas.

Evidentemente, o mesmo se passa em vizinhanças contidas em vizinhanças coordenadas de uma variedade diferenciável M. Em outras palavras, se $p \in M$ e $V \subset M$ é uma vizinhança de p contida em uma vizinhança coordenada de p e homeomorfa a uma bola, então existe uma vizinhança U de p com $\overline{U} \subset V$ e uma função diferenciável $f\colon M \to \mathbb{R}$ com $0 \leq f(q) \leq 1$ se $q \in M$, $f(q) = 1$ se $q \in \overline{U}$, e $f(q) = 0$ se $q \notin V$. Este fato permite mostrar que certas entidades definidas globalmente

em M são, em verdade, locais, isto é, seu comportamento em p só depende do comportamento de M em uma vizinhança de p (Cf. a definição de colchete de campos de vetores neste capítulo e a definição de conexão afim no Capítulo 3).

Exercícios

1. (*Variedade produto*). Sejam M e N variedades diferenciáveis e sejam $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$, $\{V_\beta, \boldsymbol{y}_\beta\}$ estruturas diferenciáveis de M e N respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e as aplicações $\boldsymbol{z}_{\alpha\beta}(p,q) = (\boldsymbol{x}_\alpha(p), \boldsymbol{y}_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$.

   (a) Mostre que $\{(U_\alpha \times V_\beta, \boldsymbol{z}_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$, na qual as projeções $\pi_1 \colon M \times N \to M$ e $\pi_2 \colon M \times N \to N$ são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável $M \times N$ é chamada a *variedade produto* de M por N.

   (b) Mostre que a variedade produto $S^1 \times \cdots \times S^1$ de n círculos S^1, onde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ tem a estrutura diferenciável usual, é difeomorfa ao n-toro T^n do Exemplo 4.9 (a).

2. Prove que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M é orientável (mesmo que M não o seja).

3. Prove que:

   (a) uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade orientável se e só se existe uma aplicação diferenciável $N \colon S \to \mathbb{R}^3$ com $N(p) \perp T_p(S)$ e $|N(p)| = 1$, para todo $p \in S$.

   (b) a faixa de Möbius (Exemplo 4.9 (b)) é não-orientável.

4. Mostre que o plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$ é não-orientável.
   Sugestão: Prove que se a variedade M é orientável, todo

aberto de M é uma variedade orientável. Observe que $P^2(\mathbb{R})$ contém um aberto difeomorfo a uma faixa de Möbius, que é não-orientável.

5. (*Mergulho de $P^2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^4$*). Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz), \quad (x,y,z) = p \in \mathbb{R}^3.$$

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Observe que a restrição $\varphi = F|S^2$ é tal que $\varphi(p) = \varphi(-p)$, e considere a aplicação $\tilde{\varphi}\colon P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\tilde{\varphi}([p]) = \varphi(p), \; [p] = \text{ classe de equivalência de } p = \{p, -p\}.$$

Prove que:

(a) $\tilde{\varphi}$ é uma imersão.

(b) $\tilde{\varphi}$ é biunívoca; junto com (a) e a compacidade de $P^2(\mathbb{R})$, isto implica que $\tilde{\varphi}$ é um mergulho.

6. (*Mergulho da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^4$*). Mostre que a aplicação $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$G(x,y) = ((r\cos y + a)\cos x, (r\cos y + a)\operatorname{sen} x, \\ r\operatorname{sen} y \cos\frac{x}{2}, r\operatorname{sen} y \operatorname{sen}\frac{x}{2}), \; (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

induz um mergulho da garrafa de Klein (Exemplo 4.9 (b)) em $\mathbb{R}^4$.

7. (*Faixa de Möbius infinita*).
Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ um cilindro circular reto, e seja $A\colon C \to C$ a simetria em relação a $0 \in \mathbb{R}^3$, isto é, $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Seja M o espaço quociente de C pela relação de equivalência $p \sim A(p)$, e seja $\pi\colon C \to M$ a projeção $\pi(p) = \{p, A(p)\}$.

(a) Mostre que é possível munir M de uma estrutura diferenciável tal que π é um difeomorfismo local.

(b) Prove que M é não-orientável.

8. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Seja $\varphi\colon M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável que é localmente um difeomorfismo. Prove que se M_2 é orientável, então M_1 é orientável.

9. Seja $G \times M \to M$ uma ação propriamente descontínua de um grupo G em uma variedade diferenciável M.

   (a) Prove que a variedade M/G (Exemplo 4.8) é orientável se e só se existe uma orientação de M que é preservada por todos os difeomorfismos de G.

   (b) Use (a) para mostrar que o plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$, a garrafa de Klein e a faixa de Möbius são não-orientáveis.

   (c) Prove que $P^n(\mathbb{R})$ é orientável se e só se n é ímpar.

10. Mostre que a topologia da variedade diferenciável M/G do Exemplo 4.8 é de Hausdorff se e só se a seguinte condição é verificada: dados dois pontos não equivalentes $p_1, p_2 \in M$, existem vizinhanças U_1, U_2 de p_1 e p_2, respectivamente, tais que $U_1 \cap gU_2 = \emptyset$ para todo $g \in G$.

11. Consideremos na reta real $\mathbb{R}$ as duas estruturas diferenciáveis seguintes: $(\mathbb{R}, x_1)$, onde $\boldsymbol{x}_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\boldsymbol{x}_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $(\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_2)$, onde $\boldsymbol{x}_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\boldsymbol{x}_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) a aplicação identidade $i\colon (\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1) \to (\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_2)$ não é um difeomorfismo; portanto, as estruturas máximas determinadas por $(\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1)$ e $(\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_2)$ são distintas.

   (b) a aplicação $f\colon (\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1) \to (\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_2)$ dada por $f(x) = x^3$ é um difeomorfismo; isto é, embora as estruturas diferenciáveis $(\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1)$ e $(\mathbb{R}, \boldsymbol{x}_2)$ sejam distintas, elas determinam variedades diferenciáveis difeomorfas.

12. (*O recobrimento duplo orientável*). Seja M^n uma variedade diferenciável não-orientável. Para cada $p \in M$, considere o conjunto B das bases de T_pM e defina que duas tais bases são equivalentes se elas estão relacionadas por uma matriz de determinante positivo. Isto é uma relação de equivalência e divide B em dois conjuntos disjuntos. Seja $\mathcal{O}_p$ o espaço quociente de B por esta relação de equivalência. $O_p \in \mathcal{O}_p$ será chamado uma *orientação* de T_pM. Seja $\overline{M}$ o conjunto

$$\overline{M} = \{(p, O_p).p \in M, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Seja $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável máxima em M, e defina $\overline{\boldsymbol{x}}_\alpha \colon U_\alpha \to \overline{M}$ por

$$\overline{\boldsymbol{x}}_\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) = \left(\boldsymbol{x}_\alpha(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha), \left[\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right]\right),$$

onde $(u_1^\alpha, \ldots, u_n^\alpha) \in U_\alpha$ e $\left[\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right]$ indica o elemento de $\mathcal{O}_p$ determinando pela base $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}\right\}$. Prove que:

(a) $\{U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em $\overline{M}$ e a variedade $\overline{M}$ assim obtida é orientável.

(b) A aplicação $\pi \colon \overline{M} \to M$ dada por $\pi(p, O_p) = p$ é diferenciável e sobrejetiva. Além disto, cada $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são abertos disjuntos de $\overline{M}$ e π restrita a cada V_i, $i = 1, 2$, é um difeomorfismo sobre U. Por esta razão, $\overline{M}$ é chamado o *recobrimento duplo orientável de* M.

(c) A esfera S^2 é o recobrimento duplo orientável de $P^2(\mathbb{R})$ e o toro T^2 é o recobrimento duplo orientável da garrafa de Klein K.

Capítulo I

Métricas Riemannianas

1 Introdução

Historicamente, a Geometria Riemanniana foi um desenvolvimento natural da Geometria Diferencial das superfícies em $\mathbb{R}^3$. Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, temos uma maneira natural de medir comprimentos de vetores tangentes a S, a saber: o produto interno $\langle v, w \rangle$ de dois vetores tangentes a S em um ponto p de S é simplesmente o produto interno destes vetores em $\mathbb{R}^3$. Como o comprimento de uma curva é, por definição, a integral do comprimento do seu vetor velocidade, a definição de $\langle\ ,\ \rangle$ nos permite medir comprimentos de curvas em S e, mais geralmente, áreas, ângulos, etc. Isto já permite definir em S certas curvas especiais, chamadas *geodésicas*, que possuem a seguinte propriedade: dados dois quaisquer de seus pontos p e q, suficientemente próximos (em um sentido a ser precisado posteriormente, Cf. Cap. III), o comprimento de uma tal curva é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva ligando p a q. Tais curvas se comportam em várias situações como se fossem as "retas"de S, e, como veremos adiante, desempenham um papel importante no desenvolvimento da Geometria.

Observe que a definição de produto interno equivale a dar, em cada ponto $p \in S$, uma forma quadrática I_p, chamada primeira forma fundamental de S em p, definida no plano tangente T_pS

por $I_p(v) = \langle v, v \rangle, \quad v \in T_pS$.

O ponto crucial deste desenvolvimento é uma observação feita por Gauss em seu famoso trabalho (v. Gauss [Ga]) publicado em 1827. Neste trabalho, Gauss definiu uma noção de curvatura para superfícies, que mede o quanto S se afasta, em cada ponto $p \in S$, do seu plano tangente em p. Na linguagem atual, a definição de Gauss se exprime da maneira seguinte. Defina uma aplicação $g\colon S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de S na esfera unitária S^2 de $\mathbb{R}^3$, associando a cada $p \in S$ um vetor unitário $N(p) \in S^2$ normal a T_pS; se S for orientável, g fica bem definida em S e é diferenciável. No tempo de Gauss, a noção de orientação de superfícies não estava muito clara (em verdade, só em 1886 Möbius apresentou explicitamente o seu famoso exemplo conhecido hoje como a faixa de Möbius) de modo que a definição de g era dada em "pedaços" de S. De qualquer maneira, é possível falar na diferencial $dg_p\colon T_pS \to T_{g(p)}S^2$. Como $N(p)$ é normal a T_pS, podemos identificar os espaços vetoriais $T_p(S)$ e $T_{g(p)}S^2$, e tem, portanto, sentido falar no determinante da aplicação linear dg_p. Gauss definiu sua curvatura como $K(p) = \det(dg_p)$ e mostrou que ela coincidia com o produto das curvaturas principais introduzidas em 1760 por Euler.

Talvez convenha mencionar que Euler definia as curvaturas principais k_1 e k_2 de uma superfície S considerando as curvaturas k_n de curvas obtidas por intersecções de S com planos normais a S em p e tomando $k_1 = \max k_n$ e $k_2 = \min k_n$. No tempo de Gauss não estava muito claro se a função produto, ou uma outra qualquer combinação de k_1 e k_2, seria a definição mais adequada de curvatura. Gauss considerou que os resultdos por ele obtidos sobre K justificavam a escolha de $K = k_1 k_2$.

Os resultados a que Gauss se referia eram os seguintes. Primeiro, que a curvatura acima definida dependia apenas da maneira de medir comprimentos em S, isto é, da primeira forma fundamental I. Segundo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo formado por geodésicas diferia de 180° por uma expressão que dependia apenas da curvatura e da área do triângulo.

Tudo indica que Gauss percebeu nitidamente as profundas

implicações de sua descoberta. Um dos problemas fundamentais do tempo de Gauss era decidir se o 5º postulado de Euclides ("de um ponto fora de uma reta se pode traçar no plano uma única reta que prolongada indefinidamente não encontra a primeira") era ou não independente dos outros postulados da Geometria. Embora sem aplicações imediatas, a questão tinha sérias implicações filosóficas, o que a transformava em um problema de primeira grandeza. Já havia sido mostrado que o fato de não ser o 5º postulado independente dos outros é equivalente ao fato de ser a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°. A descoberta de Gauss implicava, entretanto, que era possível imaginar uma Geometria (pelo menos em dimensão dois) que só dependia de uma primeira forma quadrática dada (não pelo espaço ambiente, mas) de uma maneira arbitrária. Em uma tal Geometria, definindo retas como geodésicas, a soma dos ângulos internos de um triângulo dependeria da curvatura e, em verdade, como Gauss verificou, a sua diferença para 180° seria igual à integral da curvatura estendida ao triângulo. Gauss, entretanto, não dispunha do instrumento matemático necessário ao desenvolvimento de suas idéias (o que faltava era essencialmente a noção de variedade diferenciável) e preferiu não se manifestar explicitamente sobre o assunto. O aparecimento explícito de uma geometria não-euclidiana é devido, de maneira independente, a Lobatchevski (1829) e Bolyai (1831).

As idéias de Gauss foram retomadas por Riemann em 1854 (V. Riemann [Ri]). Ainda sem uma definição adequada de variedade, ele se lançou audaciosamente a um esquema de desenvolvimento das idéias implícitas em Gauss. Em uma linguagem intuitiva e sem demonstrações, Riemann introduziu o que hoje chamamos uma variedade diferenciável de dimensão n, associou a cada ponto dela uma primeira forma quadrática e generalizou a noção de curvatura de Gauss para esta situação (Cf. Cap. IV). Além disto, ele enunciou várias relações entre a primeira forma quadrática e a curvatura que levaram décadas para serem demonstradas. Em todo o seu trabalho, fica evidente a preocupação de Riemann com as questões fundamentais contidas no desen-

volvimento das Geometrias não-euclidianas, a saber, as relações entre a Física e a Geometria.

É curioso observar que o conceito de variedade diferenciável, necessário à formalização do trabalho de Riemann, só apareceu explicitamente em 1913 em um trabalho de H. Weyl que formalizou outra concepção audaciosa de Riemann, a saber, as superfícies de Riemann. Mas isto é outra história.

Devido a uma falta de instrumental adequado, a Geometria Riemanniana desenvolveu-se muito lentamente. Um estímulo externo importante foi a aplicação de seus métodos à Teoria da Relatividade em 1916. Um outro fato fundamental foi a introdução do paralelismo de Levi-Civita. Voltaremos a tratar deste assunto no próximo capítulo. O nosso objetivo não é escrever a história completa da Geometria Riemanniana, mas simplesmente situar suas origens e fornecer motivação para o que se segue.

O nosso ponto de partida será uma variedade diferenciável na qual introduzimos em cada ponto uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que varia diferenciavelmente com o ponto. A definição explícita será dada na próxima secção.

Em todo o livro, as variedades diferenciáveis consideradas serão supostas de Hausdorff e com base enumerável. "Diferenciável" significará "de classe C^∞", e quando $M^n = M$ indicar uma variedade diferenciável, n indicará a dimensão de M.

2 Métricas Riemannianas

2.1 Definição. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q \in \boldsymbol{x}(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) =$

$d\boldsymbol{x}(0,\ldots,1,\ldots,0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$ é uma função diferenciável em U.

É claro que esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X, Y\rangle$ é diferenciável em V. É imediato verificar que esta definição é equivalente à anterior.

É usual deixar de indicar o índice p em $\langle\ ,\ \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} $(= g_{ji})$ são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* (ou "os g_{ij} da métrica") *no sistema de coordenadas* $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana.*

A primeira coisa a fazer depois de definir uma certa estrutura é estabelecer uma noção de equivalência para esta estrutura.

2.2 Definição. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f\colon M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma *isometria* se:

$$(1)\ \langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}\,, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM$$

2.3 Definição. Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ é uma *isometria local* em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f\colon U \to f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1).

É usual dizer que a variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade Riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f\colon U \to f(U) \subset N$.

O que se deve fazer em seguida é exibir alguns exemplos não triviais da dita estrutura.

2.4 Exemplo. *O exemplo quase trivial.* $M = \mathbb{R}^n$ com $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. $\mathbb{R}^n$ é chamado *espaço euclidiano de dimensão n* e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

2.5. Exemplo. *Variedades imersas.* Seja $f\colon M^n \to N^{n+k}$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo p em M. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. Como df_p é injetiva, $\langle\ ,\ \rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da Definição 2.1 são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada então a métrica *induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica.*

Um caso particular importante surge quando temos uma função diferenciável $h\colon M^{n+k} \to N^k$ e $q \in N$ é um valor regular de h (isto é, $dh_p\colon T_pM \to T_{h(p)}N$ é sobrejetiva para todo $p \in h^{-1}(q)$); é sabido que $h^{-1}(q) \subset M$ é então uma subvariedade de M de dimensão n; logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela inclusão.

Por exemplo, seja $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$. Então 0 é valor regular de h e $h^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} = S^{n-1}$ é a *esfera unitária* do $\mathbb{R}^n$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^n$ em S^{n-1} é chamada a *métrica canônica* de S^{n-1}.

2.6 Exemplo. *Grupos de Lie.* Um *grupo de Lie* é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \to xy^{-1}$, $x, y \in G$, é diferenciável. Decorre daí que as *translações à esquerda* L_x e *à direita* R_x dadas por: $L_x\colon G \to G$, $L_x(y) = xy$; $R_x\colon G \to G$, $R_x(y) = yx$ são difeomorfismos.

Dizemos que uma métrica Riemanniana em G é *invariante à esquerda* se $\langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}$ para todo $x, y \in G$, $u, v \in T_yG$, isto é, se L_x é uma isometria. Analogamente, definimos *métrica Riemanniana invariante à direita.* Uma métrica

Riemanniana invariante à direita e à esquerda é chamada *bi-invariante.*

Dizemos que um campo diferenciável de vetores X em um grupo de Lie G é *invariante à esquerda* se $dL_x X = X$ para todo $x \in G$. Os campos invariantes à esquerda ficam inteiramente determinados pelos seus valores em algum ponto de G. Isto permite introduzir uma estrutura adicional no espaço tangente no elemento neutro $e \in G$ da maneira seguinte. A cada vetor $X_e \in T_eG$ associamos o campo invariante à esquerda X definido por $X_a = dL_a X_e$, $a \in G$. Sejam X, Y campos de G invariantes à esquerda. Como para todo $x \in G$ e toda função diferenciável f em G,

$$dL_x[X,Y]f = [X,Y](f \circ L_x) = X(dL_x Y)f - Y(dL_x X)f = \\ = (XY - YX)f = [X,Y]f,$$

concluimos que o colchete de campos invariantes à esquerda é invariante à esquerda. Se $X_e, Y_e \in T_eG$, definimos $[X_e, Y_e] = [X,Y]_e$. Com esta operação, T_eG é chamada a *álgebra de Lie* de G e é indicada por $\mathcal{G}$. De agora em diante, os elementos da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ serão pensados indiferentemente como vetores de T_eG ou campos de G invariantes à esquerda.

Para introduzir em G uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer $\langle\, , \rangle_e$ em $\mathcal{G}$ e defina

$$(2) \quad \langle u, v\rangle_x = \langle (dL_{x^{-1}})_x(u), (dL_{x^{-1}})_x(v)\rangle_e, \; x \in G, \; u, v \in T_xG.$$

Como L_x depende diferenciavelmente de x isto fornece realmente uma métrica Riemanniana, evidentemente invariante à esquerda.

De maneira análoga podemos construir em G métricas invariantes à direita. Como veremos no Exercício 7, se G é compacto, G possui uma métrica bi-invariante.

Se G possui uma métrica bi-invariante, o produto interno que a métrica determina em $\mathcal{G}$ satisfaz a seguinte relação. Para todo $U, V, X \in \mathcal{G}$,

$$(3) \qquad \langle [U,X], V\rangle = -\langle U, [V,X]\rangle.$$

Para provar a relação acima, precisamos de mais alguns preliminares sobre grupos de Lie.

Para todo $a \in G$, seja $R_{a^{-1}} L_a \colon G \to G$ o automorfismo interno de G determinado por a. Tal aplicação é um difeomorfismo que deixa e fixo. Portanto, a diferencial $d(R_{a^{-1}} L_a) = Ad(a) \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é uma aplicação linear (de fato, é um homomorfismo da estrutura de álgebra de Lie, mas não precisamos disto). Explicitamente,

$$Ad(a)Y = dR_{a^{-1}}\, dL_a Y = dR_{a^{-1}}\, Y, \text{ para todo } Y \in \mathcal{G}.$$

Seja x_t o fluxo de $X \in \mathcal{G}$. Então, pela Proposição 5.4 do Capítulo 0,

$$[Y, X] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(dx_t(Y) - Y\right).$$

Por outro lado, como X é invariante à esquerda, $L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$, donde

$$x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = y x_t(e) = R_{x_t(e)}(y).$$

Portanto $dx_t = dR_{x_t(e)}$, e

$$[Y, X] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(dR_{x_t(e)}(Y) - Y\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Ad(x_t^{-1}(e))Y - Y\right).$$

Passemos agora à prova de (3). Seja $\langle\, ,\, \rangle$ uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie G. Então para todo $X, U, V \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= \langle dR_{x_t(e)} \circ dL_{x_t^{-1}(e)} U, dR_{x_t(e)} \circ dL_{x_t^{-1}(e)} V \rangle = \\ &= \langle dR_{x_t(e)} U, dR_{x_t(e)} V \rangle. \end{aligned}$$

Derivando a expressão acima em relação a t, lembrando que $\langle\, ,\, \rangle$ é bilinear, e fazendo $t = 0$ na expressão obtida, concluimos que

$$0 = \langle [U, X], V \rangle + \langle U, [V, X] \rangle,$$

que é a expressão (3).

O ponto importante da relação acima é que ela caracteriza as métricas bi-invariantes de G no seguinte sentido. Se uma forma

bilinear positiva $\langle\ ,\ \rangle_e$ definida em $\mathcal{G}$ satisfaz à relação (3), então a métrica Riemanniana definida em G por (2) é bi-invariante. A prova deste fato não é difícil mas não a apresentaremos aqui.

2.7 Exemplo. *A métrica produto.* Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 \colon M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 \colon M_1 \times M_2 \to M_2$ as projeções naturais. Introduza em $M_1 \times M_2$ uma métrica Riemanniana pondo:

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v\rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v\rangle_q \text{ para todo}$$
$$(p,q) \in M_1 \times M_2\,,\ u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2).$$

É fácil verificar que isto é realmente uma métrica Riemanniana. Por exemplo, o toro $S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$ tem uma estrutura Riemanniana obtida escolhendo no círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ a métrica Riemanniana induzida por $\mathbb{R}^2$ e tomando a métrica produto. O toro T^n com esta métrica Riemanniana chama-se *toro plano.*

Vamos mostrar agora como uma métrica Riemanniana pode ser usada para calcular comprimentos de curvas.

2.8. Definição. Uma aplicação diferenciável $c \colon I \to M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M chama-se uma *curva* (parametrizada).

Observe que uma curva parametrizada pode admitir auto-intersecção ou "pontas" (Fig. 1).

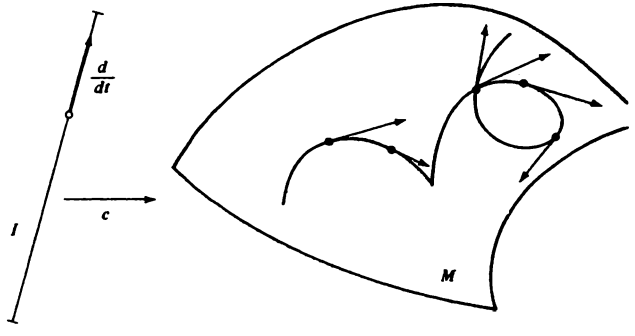


Figura 1

2.9 Definição. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c\colon I \to M$* é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é *diferenciável* se para toda função diferenciável f em M, a função $t \to V(t)f$ é uma função diferenciável em I.

O campo vetorial $dc\left(\frac{d}{dt}\right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* (ou tangente) de c. Observe que um campo vetorial ao longo de c pode não ser passível de extensão a um campo vetorial definido em um aberto de M.

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a,b] \subset I$ chama-se um *segmento*. Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Provaremos agora um teorema de existência para métricas Riemannianas.

2.10 Proposição. *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração: Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Isto significa (V. Cap. 0, Sec. 5) que $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura localmente finita (i.e., cada ponto de M possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \phi$ apenas para um número finito de índices) e que $\{f_\alpha\}$ é um conjunto de funções diferenciáveis em M satisfazendo:

1) $f_\alpha \geq 0$, $f_\alpha = 0$ no complementar do fecho $\overline{V}_\alpha$.
2) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ para todo p em M.

É claro que podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle\,,\,\rangle_\alpha$ em cada V_α: a induzida pelo sistema de coordenadas. Façamos então $\langle u,v\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle u,v\rangle_p^\alpha$ para todo $p \in M$, $u,v \in T_pM$.

É imediato verificar que isto define uma métrica Riemanniana em M. □

Para concluir este capítulo, vamos mostrar como uma métrica Riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n.

Precisamos de alguns preliminares. Seja $p \in M$ e seja $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização, com $p \in \boldsymbol{x}(U)$, na orientação de M (diremos que tal parametrização é positiva). Considere uma base ortonormal positiva $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em T_pM e escreva $X_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q)$ na base $\{e_i\}$: $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij} e_j$. Então

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{j\ell} a_{ij} a_{k\ell} \langle e_j, e_\ell \rangle = \sum_j a_{ij} a_{kj}\,.$$

Como o volume $\mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p))$ do paralelepípedo formado pelos vetores $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ em T_pM é igual a $\mathrm{vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ multiplicado pelo determinante da matriz (a_{ij}), temos que

$$\mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p). \tag{4}$$

Se $\boldsymbol{y}\colon V \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma outra parametrização positiva em torno de p, com $Y_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial y_i}(p)$ e $h_{ij}(p) = \langle Y_i, Y_j \rangle(p)$, teremos

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})}(p) &= \mathrm{vol}(X_1(p), \ldots, X_n(p)) \\ &= J\,\mathrm{vol}(Y_1(p), \ldots, Y_n(p)) = J\sqrt{\det(h_{ij})}(p), \end{aligned}$$

onde $J = \det\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \det(d\boldsymbol{y}^{-1} \circ d\boldsymbol{x})(p) > 0$ é o determinante da diferencial da mudança de coordenadas.

Seja agora $R \subset M$ uma região (= conjunto aberto e conexo), cujo fecho é compacto. Suporemos que R está contida em uma vizinhança coordenada $\boldsymbol{x}(U)$ de uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \to M$ positiva, e que a fronteira de $x^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ (observe que a noção de medida nula em $\mathbb{R}^n$ é invariante

por difeomorfismos). Definiremos o *volume* $\mathrm{vol}(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(R) = \int_{\boldsymbol{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_n \,. \tag{5}$$

A expressão acima está bem definida. Com efeito, se R está contido em outra vizinhança coordenada $y(V)$ de uma parametrização positiva $\boldsymbol{y}\colon V \subset \mathbb{R}^n \to M$, teremos com as notações acima e pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas,

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_{\boldsymbol{y}^{-1}(R)} \sqrt{\det h_{ij}}\, dy_1 \ldots dy_n = \mathrm{vol}(R), \end{aligned}$$

o que mostra que a definição (5) não depende do sistema de coordenada escolhido (aqui se usa a hipótese da orientabilidade de M, para evitar que $\mathrm{vol}(R)$ troque de sinal).

Observação: Os leitores familiarizados com formas diferenciais (em verdade, basta conhecer a definição de forma diferencial de grau n) notarão que (4) implica que o integrando de (5) é uma forma diferencial positiva de grau n, chamado usualmente a *forma volume* v de M. Para definir o volume de uma região compacta R, que não está contida em alguma vizinhança coordenada basta considerar uma partição $\{\varphi_i\}$ da unidade subordinada a uma cobertura (finita) de R por vizinhanças coordenadas $\boldsymbol{x}(U_i)$ e tomar

$$\mathrm{vol}(R) = \sum_i \int_{\boldsymbol{x}_i^{-1}(R)} \varphi_i\, v.$$

É imediato verificar que a expressão acima não depende da escolha da partição da unidade.

Observação: Pelo que acabamos de ver, basta a existência de uma forma diferencial positiva do grau n (elemento de volume) para que se possa definir uma noção de volume em uma

variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana é apenas uma das maneiras pela qual se obtém um elemento de volume (Cf. Exercício 7).

Exercícios

1. Prove que a aplicação antípoda $A\colon S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ é uma isometria de S^n. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$ tal que a projeção natural $\pi\colon S^n \to P^n(\mathbb{R})$ seja uma isometria local.

2. Introduza uma métrica Riemanniana no toro T^n exigindo que a projeção natural $\pi\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ dada por

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = \left(e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n}\right),\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

   seja uma isometria local. Mostre que com esta métrica T^n é isométrico ao toro plano.

3. Obtenha uma imersão isométrica do toro plano T^n em $\mathbb{R}^{2n}$.

4. Uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = yt + x,\ \ t, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, é chamada *função afim própria.*
   O conjunto de todas essas funções com a lei usual de composição é um grupo de Lie G. Como variedade diferenciável, G é simplesmente o semi-plano superior isto é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com a estrutura diferenciável usual. Prove que:

   (a) A métrica Riemanniana de G invariante à esquerda, que no elemento neutro $e = (0, 1)$ coincide com a métrica euclidiana ($g_{11} = g_{22} = 1,\ \ g_{12} = 0$) é dada por $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{y^2},\ \ g_{12} = 0$, (esta é a métrica da geometria não-euclidiana de Lobatchevski).

(b) Pondo $(x, y) = z = x+iy$, $i = \sqrt{-1}$, a transformação $z \to z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ é uma isometria de G.

Sugestão: Observe que a primeira forma fundamental pode ser escrita:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -\frac{4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}.$$

5. Prove que as isometrias de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica induzida são as restrições a S^n das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^{n+1}$.

6. Mostre que a relação "M é localmente isométrica a N" não é simétrica.

† 7. Seja G um grupo de Lie compacto e conexo ($\dim G = n$). O objetivo do exercício é provar que G possui uma métrica bi-invariante. Para isto, prove as seguintes etapas:

(a) Seja ω uma n-forma diferencial em G invariante à esquerda, isto é, $L_x^*\omega = \omega$, para todo $x \in G$. Prove que ω é invariante à direita.

Sugestão: Para cada $a \in G$, $R_a^*\omega$ é invariante à esquerda. Decorre daí que $R_a^*\omega = f(a)\omega$. Verifique que $f(ab) = f(a)f(b)$, isto é, $f\colon G \to \mathbb{R} - \{0\}$ é um homomorfismo (contínuo) de G no grupo multiplicativo dos números reais. Como $f(G)$ é um subgrupo compacto e conexo, conclui-se que $f(G) = 1$. Logo $R_a^*\omega = \omega$.

(b) Mostre que existe uma n-forma diferencial invariante à esquerda ω em G.

(c) Seja $\langle\,,\,\rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G. Seja ω uma n-forma diferencial positiva invariante à

esquerda em G, e defina uma nova métrica Riemanniana $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ em G por

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_p = \int_G \langle (dR_x)_y u, (dR_x)_y v\rangle_{yx}\, \omega,$$
$$x, y \in G, \quad u, v \in T_y(G).$$

Prove que $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ é bi-invariante.

Capítulo II

Conexões Afins; Conexão Riemanniana

1 Introdução

Um fato fundamental no desenvolvimento da Geometria Diferencial foi a introdução, em 1917, do paralelismo de Levi-Civita (v. Levi-Civita [LC]). No caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, uma idéia equivalente pode ser descrita da maneira seguinte. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $c\colon I \to S$ uma curva parametrizada em S, e $V\colon I \to \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes a S ao longo de c. O vetor $\frac{dV}{dt}(t)$, $t \in I$, não pertence, em geral, ao plano tangente $T_{c(t)}S$. A noção de derivada de um campo vetorial não é, portanto, uma noção da geometria "intrínseca"de S. Para remediar este inconveniente, consideramos, em vez da derivada usual $\frac{dV}{dt}(t)$, a chamada derivada covariante $\frac{DV}{dt}(t)$ que é a projeção ortogonal de $\frac{dV}{dt}$ sobre $T_{c(t)}S$; em outras palavras, $\frac{DV}{dt}$ é a derivada de V como "vista de S".

O ponto fundamental é que a derivada covariante só depende da primeira forma quadrática de S e é, portanto, um conceito que pode ser considerado em Geometria Riemanniana. Em particular, a noção de derivada covariante permite-nos dar um sentido à derivada do vetor velocidade de c, isto é, à aceleração da curva c em S. É possível mostrar que as curvas de aceleração nula são

precisamente as geodésicas de S e que a curvatura Gaussiana de S pode ser expressa em termos da noção de derivada covariante.

Diremos que um campo V ao longo de c é paralelo se $\frac{DV}{dt} \equiv 0$. Reciprocamente, a partir da noção de paralelismo é possível reobter a noção de derivada covariante (Cf. Exercício 2 deste capítulo). As duas noções são, portanto, equivalentes.

Embora hoje seja preferível partir da noção de derivada covariante, historicamente a noção de paralelismo a antecedeu. Para superfícies em $\mathbb{R}^3$, o paralelismo pode ser introduzido da maneira seguinte. Considere a família de planos tangentes a S ao longo de c. Esta família determina uma superfície E, a envoltória da família, que possui a propriedade de ser tangente a S ao longo de c e de ter curvatura Gaussiana $K \equiv 0$. (v. M. do Carmo [dC 2] pp. 195-197). Não é difícil mostrar que o paralelismo ao longo de c, definido pelo anulamento da derivada covariante, é o mesmo, quer considerado em relação a S ou em relação a E. Por outro lado, prova-se que as superfícies de curvatura zero são localmente isométricas a um plano. Como o paralelismo é invariante por isometrias, podemos efetuá-lo "euclidianamente" na imagem isométrica de E, e, depois, trazê-lo de volta a S. Esta é a construção usada classicamente para definir o paralelismo, (M. do Carmo [dC 2], pg. 244). Por razões óbvias, é preferível, tecnicamente, trabalhar com a derivada covariante.

A noção de derivada covariante tem várias conseqüências importantes. Ela tornou claro que as idéias básicas de geodésica e curvatura poderiam ser definidas em situações mais gerais que a de variedades Riemannianas. É suficiente para isto que se possa definir uma noção de derivação de campos de vetores com certas propriedades (o que hoje é chamada uma conexão afim, Cf. Definição 2.1 deste capítulo). Isto estimulou a criação de várias "estruturas geométricas" (em variedades diferenciáveis) mais gerais que a Geometria Riemanniana. Assim como a geometria euclidiana métrica é um caso particular da geometria afim e, mais geralmente, da geometria projetiva, a Geometria Riemanniana é um caso particular de estruturas geométricas mais gerais.

Não entraremos nos detalhes destes desenvolvimentos. Nosso

interesse em conexões afins reside no fato (Cf. Teorema 3.6 deste capítulo) que a escolha de uma métrica Riemanniana em uma variedade M determina univocamente uma certa conexão afim de M. Podemos, deste modo, derivar campos de vetores em M.

2 Conexões afins

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

2.1 Definição. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Esta definição não é tão transparente quanto a de estrutura Riemanniana. A seguinte proposição, no entanto, deverá esclarecer um pouco a situação.

2.2 Proposição. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c\colon I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde* W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I.

c) *Se* V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathcal{X}(M)$, *i.e.*, $V(t) = Y(c(t))$, *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

2.3 Observação. A última linha de (c) faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ depende só do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. Com efeito, a parte (iii) da Definição 2.1 permite mostrar que a noção de conexão afim é, de fato, uma noção local (cf. Obs. 5.7 do Cap. 0). Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i\,, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i}\left(\sum_j y_j X_j\right)\\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j\,.\end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluimos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)\right) X_k\,,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

2.4 Observação. A proposição acima mostra que a escolha de uma conexão afim em M dá origem a uma derivada "bona fide" (i.e. satisfazendo (a) e (b)) de campos de vetores ao longo de curvas. A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira

de derivar vetores ao longo de curvas em particular, é possível falar em aceleração de uma curva em M.

Demonstração da Proposição 2.2: Suponhamos inicialmente que existe uma correspondência satisfazendo (a), (b) e (c). Seja $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap \boldsymbol{x}(U) \neq \varnothing$ e seja $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$, $t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$ Então podemos expressar o campo V localmente como $V = \sum_j v^j X_j\,, \quad j = 1, \ldots, n$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$.

Por a) e b), tem-se

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}\,.$$

Por c) e (i) da Definição 2.1,

$$\begin{aligned}\frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{\left(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i\right)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j\,, \quad i, j = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j\,. \tag{1}$$

A expressão (1) nos mostra que se existe uma correspondência satisfazendo às condições da Proposição 2.2, então tal correspondência é única.

Para mostrar a existência, definamos $\frac{DV}{dt}$ em $\boldsymbol{x}(U)$ por (1). É imediato verificar que (1) possui as propriedades desejadas. Se $\boldsymbol{y}(W)$ é uma outra vizinhança coordenada, com $\boldsymbol{y}(W) \cap \boldsymbol{x}(U) \neq \varnothing$ e definirmos $\frac{DV}{dt}$ em $\boldsymbol{y}(W)$ por (1), as definições "concordam" em $\boldsymbol{y}(W) \cap \boldsymbol{x}(U)$, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $\boldsymbol{x}(U)$. Segue-se que a definição pode ser estendida para todo M, e isto conclui a demonstração. □

A noção de paralelismo surge agora de maneira natural.

2.5 Definição. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c\colon I \to M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

2.6 Proposição. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c\colon I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Demonstração: Admitamos que o teorema foi provado para o caso em que $c(I)$ está contido em uma vizinhança coordenada. Por compacidade, para todo $t_1 \in I$, o segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, em cada uma das quais V pode ser definido, por hipótese. Pela unicidade, as definições coincidem nas intersecções não vazias, o que permite definir V para $[t_0, t_1]$.

Devemos, portanto, provar o teorema no caso em que $c(I)$ está contido numa vizinhança coordenada $\boldsymbol{x}(U)$ de um sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em torno de $c(I)$. Seja $\boldsymbol{x}^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e seja $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$, onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.

Suponhamos que existe um V em $\boldsymbol{x}(U)$ que é paralelo ao longo de c com $V(t_0) = V_0$. Então $V = \sum_j v^j X_j$ satisfaz

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j .$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, e trocando j por k na primeira soma, obteremos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k = 0.$$

O sistema de n equações diferenciais em $v^k(t)$,

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

possui uma única solução satisfazendo a condição inicial $v^k(t_0) = v_0^k$. Segue-se que, se V existe, ele é único. Além disso, como o sistema é linear, a solução está definida para todo $t \in I$, o que demonstra a existência de um (único) V com as propriedades desejadas. □

3 Conexão Riemanniana

3.1 Definição. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.

A Definição 3.1 é justificada pela proposição seguinte que mostra que se ∇ é compatível com $\langle , \rangle$, então podemos diferenciar o produto interno pela "regra do produto" usual.

3.2 Proposição. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c\colon I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \tag{3}$$

Demonstração: É óbvio que a equação (3) implica a Definição 3.1. Mostremos, portanto, a recíproca. Escolha uma base ortonormal $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}(M)$, $t_0 \in I$. Utilizando a Proposição 2.6, estenda paralelamente cada um dos vetores $P_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$, ao longo de c. Como ∇ é compatível com a métrica, $\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}(M)$,

para todo $t \in I$. Podemos, portanto, escrever

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I.

Segue-se daí que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle. \qquad \square$$

3.3 Corolário. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$(4) \qquad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Demonstração: Suponhamos que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e sejam $c\colon I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$, e com $\frac{dc}{dt}\big|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \Big|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p.$$

Como p é arbitrário, segue-se (4). A recíproca é óbvia. $\square$

3.4 Definição. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita *simétrica* quando

$$(5) \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

3.5 Observação. Em um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$, o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, \ldots, n$,

$$(5') \qquad \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

o que justifica o nome adotado (observe que (5') é equivalente ao fato que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$).

Podemos agora enunciar o teorema fundamental deste capítulo.

3.6 Teorema. (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ *é simétrica.*

b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇. Então

$$(6) \qquad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

$$(7) \qquad Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle,$$

$$(8) \qquad Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

Somando (6) e (7) e subtraindo (8), teremos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{aligned} &X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (9) \quad \langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &- \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \end{aligned}$$

A expressão (9) mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ por (9). É fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas. □

3.7 Observação. A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou *Riemanniana*) de M.

Concluiremos este capítulo escrevendo parte do que foi feito acima em um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$. É conveniente dizer que as funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os *coeficientes da conexão* ∇ em U ou os *símbolos de Christoffel* da conexão. De (9) segue-se que

$$\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell\, g_{\ell k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\}$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{10}$$

A equação (10) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} (dados pela métrica).

Observe que para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt}\right\} X_k$$

que vem de (1). Observe que $\frac{DV}{dt}$ difere da derivada usual no espaço euclidiano por termos que envolvem os símbolos de Christoffel. Portanto, no espaço euclidiano a derivada covariante coincide com a derivada usual.

Exercícios

1. Seja M uma variedade Riemanniana. Considere a aplicação

$$P = P_{c,t_0,t}\colon T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$$

definida por: $P_{c,t_0,t}(v)$, $v \in T_{c(t_0)}M$, é o transporte paralelo do vetor v ao longo da curva c. Mostre que P é uma isometria e que, se M é orientada, P preserva a orientação.

2. Sejam X e Y campos de vetores numa variedade Riemanniana M. Sejam $p \in M$ e $c\colon I \to M$ uma curva integral de X por p, i.e. $c(t_0) = p$ e $\frac{dc}{dt} = X(c(t))$. Prove que a conexão Riemanniana de M é

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\left(P^{-1}_{c;t_0;t}(Y(c(t)))\right)\Big|_{t=t_0},$$

onde $P_{c;t_0;t}\colon T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$ é o transporte paralelo ao longo de c de t_0 a t (isto mostra como a conexão pode ser reobtida da noção de paralelismo).

3. Seja $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Suponha que M tem a métrica Riemanniana induzida por f (cf. Exemplo 2.5 do Cap. I). Seja $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$. Sejam X, Y campos de vetores em $f(U)$ e estenda-os a campos de vetores $\overline{X}$, $\overline{Y}$ em um aberto de $\overline{M}$. Defina $(\nabla_X Y)(p)$ = componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Prove que ∇ é a conexão Riemanniana de M.

4. Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com a métrica Riemanniana induzida. Seja $c\colon I \to M$ uma curva diferenciável em M e V um campo de vetores tangentes a M ao longo de c; V pode ser pensado como uma função diferenciável $V\colon I \to \mathbb{R}^3$, com $V(t) \in T_{c(t)}M$.

a) Mostre que V é paralelo se e somente se $\frac{dV}{dt}$ é perpendicular a $T_{c(t)}M \subset \mathbb{R}^3$ onde $\frac{dV}{dt}$ é a derivada usual de $V: I \to \mathbb{R}^3$.

b) Se $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera unitária de $\mathbb{R}^3$, mostre que o campo velocidade ao longo de círculos máximos parametrizados pelo comprimento de arco é um campo paralelo. O mesmo argumento se aplica para $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

5. No espaço euclidiano, o transporte paralelo de um vetor entre dois pontos não depende da curva que liga estes dois pontos. Mostre, por um exemplo, que isto não é verdade numa variedade Riemanniana qualquer.

6. Seja M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Considere a curva constante $f: I \to M$ dada por $f(t) = p$, para todo $t \in I$. Seja V um campo vetorial ao longo de f (isto é, V é uma aplicação diferenciável de I em T_pM). Mostre $\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}$, isto é, a derivada covariante coincide com a derivada usual de $V: I \to T_pM$.

7. Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária, c um paralelo qualquer de S^2 e V_0 um vetor tangente a S^2 em um ponto de c. Descreva geometricamente o transporte paralelo de V_0 ao longo de c.
Sugestão: Considere o cone C tangente a S^2 ao longo de c e mostre que o transporte paralelo de V_0 ao longo de c é o mesmo, quer tomado em relação a S^2 ou a C.

8. Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

com a métrica dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = 0$ (métrica da geometria não-euclidiana de Lobatchevski).

a) Mostre que os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana são: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$.

b) Seja $v_0 = (0,1)$ um vetor tangente no ponto $(0,1)$ de $\mathbb{R}^{2+}$ (v_0 é o vetor unitário do eixo $0y$ com origem em $(0,1)$). Seja $v(t)$ o transporte paralelo de v_0 ao longo da curva $x = t, \quad y = 1$. Mostre que $v(t)$ faz um ângulo t com a direção de $0y$ no sentido horário.

Sugestão: O campo $v(t) = (a(t), b(t))$ safisfaz ao sistema (2) que define um campo paralelo e que, neste caso, se simplifica em

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} + \Gamma^1_{12}\, b = 0, \\ \frac{db}{dt} + \Gamma^2_{11}\, a = 0. \end{cases}$$

Fazendo $a = \cos\theta(t), \quad b = \operatorname{sen}\theta(t)$ e notando que ao longo da curva dada temos $y = 1$, obteremos das equações acima que $\frac{d\theta}{dt} = -1$. Como $v(0) = v_0$, isto implica que $\theta(t) = \pi/2 - t$.

9. (*Métricas pseudo-Riemannianas*). Uma métrica *pseudo-Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é a escolha, para cada ponto $p \in M$, de uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle\, , \rangle$ (porém não necessariamente positiva definida) em T_pM e que varia diferenciavelmente com p. Exceto pelo fato de não ser $\langle\, , \rangle$ definida positiva, todas as definições até agora apresentadas fazem sentido em uma métrica pseudo-Riemanniana. Por exemplo, uma conexão afim em M é compatível com uma métrica pseudo-Riemanniana de M se (4) é satisfeita; se, além disto, (5) se verifica, a conexão afim é dita *simétrica.*

a) Mostre que o Teorema de Levi-Civita se estende a métricas pseudo-Riemannianas. A conexão assim obtida é chamada pseudo-Riemanniana.

b) Introduza uma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{R}^{n+1}$ pela forma quadrática:

$$Q(x_0, \ldots, x_n) = -(x_0)^2 + (x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2,$$

$$(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mostre que o transporte paralelo da conexão de Levi-Civita desta métrica coincide com o transporte paralelo usual do $\mathbb{R}^{n+1}$ (esta métrica pseudo-Riemanniana é chamada *métrica de Lorentz*; para $n = 3$, ela aparece naturalmente em Relatividade).

Capítulo III

Geodésicas; Vizinhanças Convexas

1 Introdução

Fixada a terminologia básica, passaremos a estudar os dois conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana, a saber, geodésicas e curvatura. Neste capítulo introduziremos a noção de geodésica como uma curva cuja aceleração é nula. No próximo capítulo, iniciaremos o estudo da curvatura.

Um dos objetivos do presente capítulo é mostrar que uma geodésica minimiza o comprimento de arco para pontos "suficientemente próximos"(em um sentido a ser precisado); além disso, se uma curva minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos, ela é uma geodésica. Para provar estes fatos, necessitaremos de vários conceitos e resultados que serão úteis posteriormente.

Na Seção 2 introduziremos o fibrado tangente TM de uma variedade M que permite reduzir o estudo local das geodésicas de M ao estudo das trajetórias de um campo de vetores em TM (o campo geodésico). Na Seção 3, introduziremos a aplicação exponencial de um aberto de TM em M que é simplesmente uma maneira de "colecionar"em uma única aplicação diferenciável,

todas as geodésicas de M. Esta notação é extremamente útil, e permite-nos, por exemplo, aplicar o teorema da função inversa para mostrar que cada ponto de M possui uma vizinhança W tal que dois pontos quaisquer de W podem ser ligados por uma única geodésica que minimiza o comprimento de arco (v. Teorema 3.7).

O conceito de geodésica, como curva que minimiza a distância entre dois pontos próximos, é bastante antigo. Para superfícies do $\mathbb{R}^3$, as geodésicas podem ser caracterizadas como aquelas curvas $c(s)$ (onde s é o comprimento de arco) para as quais a aceleração $c''(s)$ em $\mathbb{R}^3$ é perpendicular à superfície (portanto, a aceleração de c "como vista"da superfície é nula). Uma tal caracterização já era aparentemente conhecida, pelo menos para superfícies convexas, desde 1697 por J. Bernoulli, e as equações das geodésicas das superfícies na forma $f(x, y, z) = 0$ já eram conhecidas de Euler desde 1721. Entretanto, só com o trabalho de Gauss [Ga] em 1827 foi estabelecida uma relação entre as geodésicas e a curvatura de uma superfície (Cf. Introdução do Cap. I). Esta relação é fundamental e, sob várias formas, aparecerá repetidamente neste livro.

2 O fluxo geodésico

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

2.1 Definição. Uma curva parametrizada $\gamma\colon I \to M$ é uma *geodésica em* $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto t_0; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma *geodésica.* Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma\colon I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) *geodésica ligando* $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Às vezes, por abuso de linguagem, chamaremos de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica γ.

Se $\gamma\colon I \to M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Suporemos, de agora em diante, que $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = c \neq 0$, isto é, excluiremos as geodésicas que se reduzem a pontos. O comprimento de arco s de γ, a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica γ está *normalizada*.

Vamos agora determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica γ em um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$ em torno de $\gamma(t_0)$. Em U,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

γ será uma geodésica se e só se

$$0 = \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = \sum_k \left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Logo o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\frac{d^2x_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

fornece as equações procuradas.

Para estudarmos o sistema (1) é conveniente considerar o fibrado tangente TM, que também será útil em situações futuras.

TM é o conjunto dos pares (q, v), $q \in M$, $v \in T_qM$. Se $(U, \boldsymbol{x})$ é um sistema de coordenadas em M, então todo vetor de T_qM, $q \in \boldsymbol{x}(U)$, é escrito como $\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Tomando $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ como coordenadas de (q, v) em TU, é fácil mostrar que obtemos uma estrutura diferenciável para TM (Cf. o Exemplo 4.1 do Cap. 0).

Observe que $TU = U \times \mathbb{R}^n$, isto é, o fibrado tangente é localmente um produto. Além disso, a projeção canônica $\pi\colon TM \to M$ dada por $\pi(q,v) = q$ é diferenciável.

Qualquer curva diferenciável $t \to \gamma(t)$ em M determina uma curva $t \to \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$ em TM. Se γ é uma geodésica então, em TU, a curva

$$t \to \left(x_1(t), \ldots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$$

satisfaz o sistema

$$(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = y_k \\ \\ \dfrac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \, y_i y_j \quad k = 1, \ldots, n \end{cases}$$

em termos de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de TU. Portanto o sistema de segunda ordem (1) em U é equivalente ao sistema de primeira ordem (1') em TU.

Recordemos o seguinte teorema de equações diferenciais.

2.2 Teorema. *Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade M e $p \in V$ então existem um aberto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$, um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞, $\varphi\colon (-\delta, \delta) \times V_0 \to V$ tais que a curva $t \to \varphi(t,q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q, para cada $q \in V_0$.*

A aplicação $\varphi_t\colon V_0 \to V$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$ é chamada o *fluxo* de X em V.

2.3 Lema. *Existe um único campo G em TM cujas trajetórias são da forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M.*

Demonstração: Provaremos primeiro a unicidade de G, supondo sua existência. Consideremos um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$ em M. Pela hipótese, as trajetórias de G em TU são dadas por $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ onde γ é uma geodésica. Decorre daí que $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$ é solução do sistema de equações diferenciais (1'). Pela unicidade de trajetórias de um tal sistema, concluimos que se G existe, então é único.

Para provarmos a existência de G, definímo-lo localmente pelo sistema (1'). Usando a unicidade, concluimos que G está bem definido em TM. □

2.4 Definição. O campo G definido acima é chamado *campo geodésico* em TM e seu fluxo é o *fluxo geodésico* de TM.

Aplicando o Teorema 2.2 ao campo geodésico G no ponto $(p,0) \in TM$, obtemos o seguinte resultado:

Para cada $p \in M$ existem um aberto $\mathcal{U}$ em TU, onde $(U, \boldsymbol{x})$ é um sistema de coordenadas em p e $(p,0) \in \mathcal{U}$, um número $\delta > 0$ e uma aplicação C^∞, $\varphi\colon (-\delta,\delta) \times \mathcal{U} \to TU$, tais que: $t \to \varphi(t,q,v)$ é a única trajetória de G que satisfaz à condição inicial $\varphi(0,q,v) = (q,v)$, para cada $(q,v) \in \mathcal{U}$.

É possível escolher $\mathcal{U}$ na forma

$$\mathcal{U} = \{(q,v) \in TU; q \in V \text{ e } v \in T_qM \text{ com } |v| < \varepsilon_1\},$$

onde $V \subset U$ é uma vizinhança de $p \in M$. Pondo $\gamma = \pi \circ \varphi$, onde $\pi\colon TM \to M$ é a projeção canônica, podemos escrever o enunciado anterior do seguinte modo.

2.5 Proposição. *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\gamma\colon (-\delta,\delta) \times \mathcal{U} \to M,\ \mathcal{U} = \{(q,v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \to \gamma(t,q,v)$, $t \in (-\delta,\delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon_1$.

A Proposição 2.5 afirma que se $|v| < \varepsilon_1$, a geodésica $\gamma(t,q,v)$ existe em um intervalo $(-\delta,\delta)$ e é única. Em verdade, é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição, ou vice-versa. Isto decorre do seguinte lema de homogeneidade.

2.6 Lema. (Homogeneidade de uma geodésica). *Se a geodésica $\gamma(t,q,v)$ está definida no intervalo $(-\delta,\delta)$, então a geodésica*

$\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, *está definida no intervalo* $\left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$ *e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demonstração: Seja $h\colon \left(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right) \to M$ uma curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Então $h(0) = q$ e $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Além disso, como $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h'(t)}h'(t) = a^2\nabla_{\gamma'(at,q,v)}\gamma'(at, q, v) = 0,$$

onde, na primeira igualdade, estendemos $h'(t)$ a uma vizinhança de $h(t)$ em M. Portanto, h é uma geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade av. Por unicidade,

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av). \qquad \square$$

A Proposição 2.5, junto com o lema de homogeneidade, permite tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de p. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

2.7 Proposição. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞, $\gamma\colon (-2, 2)\times\mathcal{U} \to M$, $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM$, com $|w| < \varepsilon$.*

Demonstração: A geodésica $\gamma(t, q, v)$ da Proposição 2.5 está definida para $|t| < \delta$ e para $|v| < \varepsilon_1$. Pelo lema de homogeneidade, $\gamma\left(t, q, \frac{\delta v}{2}\right)$ está definida para $|t| < 2$. Tomando $\varepsilon < \frac{\delta\varepsilon_1}{2}$, a geodésica $\gamma(t, q, w)$ está definida para $|t| < 2$ e $|w| < \varepsilon$. $\square$

2.8 Observação. Por um argumento análogo, podemos tornar a velocidade de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de p.

A Proposição 2.7 nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da maneira seguinte. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset$

TM um aberto dado pela Proposição 2.7. Então a aplicação $\exp\colon \mathcal{U} \to M$ dada por

$$\exp(q,v) = \gamma(1,q,v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q,v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a *aplicação exponencial* em $\mathcal{U}$.

É claro que exp é diferenciável. Na maior parte das aplicações, utilizaremos a restrição de exp a um aberto do espaço tangente T_qM, isto é, definiremos

$$\exp_q\colon B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q,v)$. Aqui, e de agora em diante, indicaremos por $B_\varepsilon(0)$ uma bola aberta de centro na origem 0 de T_qM e de raio ε. É imediato verificar que $\exp_q$ é diferenciável e $\exp_q(0) = q$.

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q, sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

2.9 Proposição. *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q\colon B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M.*

Demonstração: Calculemos $d(\exp_q)_0$:

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1,q,tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t,q,v))\Big|_{t=0} = v. \end{aligned}$$

Logo $d(\exp_q)_0$ é a identidade de T_qM, donde pelo teorema da função inversa, $\exp_q$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0. □

2.10 Exemplo. Seja $M = \mathbb{R}^n$. Como a derivação covariante coincide com a usual, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. A exponencial é

evidentemente a identidade (com a identificação usual do espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p com $\mathbb{R}^n$).

2.11 Exemplo. Seja $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de dimensão n. Como vimos no Exercício 4(b) do Capítulo II, os círculos máximos de S^n parametrizados pelo comprimento de arco são geodésicas. Vamos mostrar que todas as geodésicas de S^n são círculos máximos parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco. Com efeito, dados $p \in S^n$ e um vetor unitário $v \in T_pS^n$, a intersecção com S^n do plano que contém a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, o ponto p e o vetor v é um círculo máximo que pode ser parametrizado como a geodésica por p com velocidade v. Da unicidade da Proposição 2.5 segue então o afirmado.

Dado um ponto $(p, v) \in TM$, o ponto $\exp_p v \in M$ é obtido percorrendo sobre a geodésica $\gamma\left(t, p, \frac{v}{|v|}\right)$ um comprimento igual a $|v|$, a partir de p. No nosso caso, é claro que $\exp_p$ está definida em todo o espaço tangente, e pode ser descrita da maneira seguinte: $\exp_p$ transforma $B_\pi(0)$ injetivamente em $S^n - \{q\}$, onde q é o ponto antípoda de p; a fronteira de $B_\pi(0)$ é transformada em q; a coroa circular aberta $B_{2\pi}(0) = \overline{B_\pi(0)}$ é transformada injetivamente em $S^n - \{p, q\}$. a fronteira de $B_{2\pi}(0)$ é transformada em p, etc. (Fig. 1). Observe que se considerássemos a variedade Riemanniana $S^n - \{q\}$, $\exp_p$ estaria definida apenas em $B_\pi(0) \subset T_p(S^n - \{q\})$.

3 Propriedades minimizantes das geodésicas

Desejamos agora estudar certas propriedades de minimização das geodésicas. Para isto necessitaremos de algumas definições e lemas preliminares.

3.1 Definição. Uma *curva diferenciável por partes* é uma aplicação contínua $c\colon [a, b] \to M$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições

$c|_{[t_i,t_{i+1}]}$, $i = 0, \ldots, k-1$, são diferenciáveis. Dizemos que c liga os pontos $c(a)$ e $c(b)$. $c(t_i)$ é chamado um *vértice* de c, e o ângulo formado por $\lim_{t\to t_i^+} c'(t)$ com $\lim_{t\to t_i^-} c'(t)$ é chamado o *ângulo do vértice* $c(t_i)$; aqui $\lim_{t\to t_i^+}$ ($\lim_{t\to t_i^-}$) significa que t se aproxima de t_i por valores maiores (menores) que t_i.

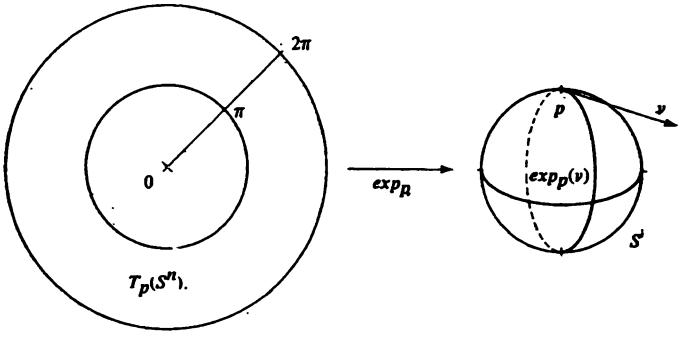


Figura 1

O transporte paralelo pode ser facilmente estendido às curvas diferenciáveis por partes: dado $V_0 \in T_{c(t)}M$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, estende-se V_0 a um campo paralelo $V(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$; tomando $V(t_i)$ e $V(t_{i+1})$ como novos valores iniciais, podemos estender $V(t)$ paralelamente ao intervalo $[t_{i-1}, t_{i+2}]$, e assim sucessivamente.

3.2 Definição. Um segmento de geodésica $\gamma\colon [a,b] \to M$ é chamado *minimizante* se $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$, onde $\ell(\ )$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Na prova do lema de Gauss, apresentada a seguir, usaremos a seguinte terminologia.

3.3 Definição. Seja A um conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ com $U \subset A \subset \overline{U}$, U aberto em $\mathbb{R}^2$ e tal que a fronteira ∂A de A seja uma curva diferenciável por partes com ângulos dos vértices distintos de π. Uma *superfície parametrizada* em M é uma aplicação

diferenciável $s\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to M$. (Observe que dizer que s é diferenciável em A equivale a dizer que existe um aberto $U \supset A$ onde s se estende diferenciavelmente. A condição sobre os ângulos dos vértices de A é necessária para que a diferencial de s não dependa da extensão considerada.)

Um *campo de vetores v ao longo de s* é uma aplicação que associa a cada $q \in A$ um vetor $V(q) \in T_{s(q)}M$, que é diferenciável no seguinte sentido: se f é uma função diferenciável em M, então a aplicação $q \to V(q)f$ é diferenciável.

Sejam (u, v) coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^2$. Para v_0 fixo, a aplicação $u \to s(u, v_0)$, onde u pertence a uma componente conexa de $A \cap \{v = v_0\}$, é uma curva em M, e $ds\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$, que denotaremos por $\frac{\partial s}{\partial u}$, é um campo de vetores ao longo desta curva. Isto define $\frac{\partial s}{\partial u}$ para todo $(u, v) \in A$ e $\frac{\partial s}{\partial u}$ é um campo de vetores ao longo de s. Analogamente se define $\frac{\partial s}{\partial v}$.

Se V é um campo ao longo de $s\colon A \to M$, definimos as *derivadas covariantes* $\frac{DV}{\partial u}$ e $\frac{DV}{\partial v}$ do seguinte modo. $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ é a derivada covariante ao longo da curva $u \to s(u, v_0)$ da restrição de V a esta curva. Isto define $\frac{DV}{\partial u}(u, v)$ para todo $(u, v) \in A$. Analogamente, se define $\frac{DV}{\partial v}$.

3.4 Lema (de simetria). *Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $s\colon A \to M$ é uma superfície parametrizada então:*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Demonstração: Seja $\boldsymbol{x}\colon V \subset \mathbb{R}^n \to M$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de um ponto de $s(A)$. Podemos escrever

$$\boldsymbol{x}^{-1} \circ s(u, v) = (x^1(u, v), \ldots, x^n(u, v)).$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) &= \frac{D}{\partial v}\left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u}\nabla_{\sum_j (\partial x^j/\partial v)\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j}\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v}\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\end{aligned}$$

Pela simetria da conexão, $\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Logo, calculando $\frac{D}{\partial u}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)$ obteremos a mesma expressão acima, o que prova o lema. □

No que segue identificaremos o espaço tangente a T_pM em $v \in T_pM$ com o próprio T_pM.

3.5 Lema (de Gauss). *Seja $p \in M$ e seja $v \in T_pM$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle. \tag{2}$$

Demonstração: Seja $w = w_T + w_N$, onde w_T é paralelo a v e w_N é normal a v. Como $d\exp_p$ é linear e, por definição de $\exp_p$,

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_T)\rangle = \langle v, w_T\rangle,$$

basta provar (2) para $w = w_N$. É claro que podemos supor $w_N \neq 0$.

Como $\exp_p v$ está definida, existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\exp_p u$ está definida para

$$u = tv(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon < s < \varepsilon,$$

onde $v(s)$ é uma curva em T_pM com $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ e $|v(s)| = \text{const}$. Podemos, portanto, considerar a superfície parametrizada

$$f\colon A \to M, \quad A = \{(t,s); 0 \leq t \leq 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

dada por

$$f(t,s) = \exp_p tv(s).$$

Observe que as curvas $t \to f(t,s_0)$ são geodésicas (v. Fig. 2).

Para provar (2) para $w = w_N$, observamos primeiro que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (1,0) = \langle (d\exp_p)_v(w_N), (d\exp_p)_v(v) \rangle. \tag{3}$$

Além disto, para todo (t,s), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

O último termo da expressão acima é zero, pois $\frac{\partial f}{\partial t}$ é o vetor tangente de uma geodésica. Pela simetria da conexão, o primeiro termo da soma se transforma em

$$\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

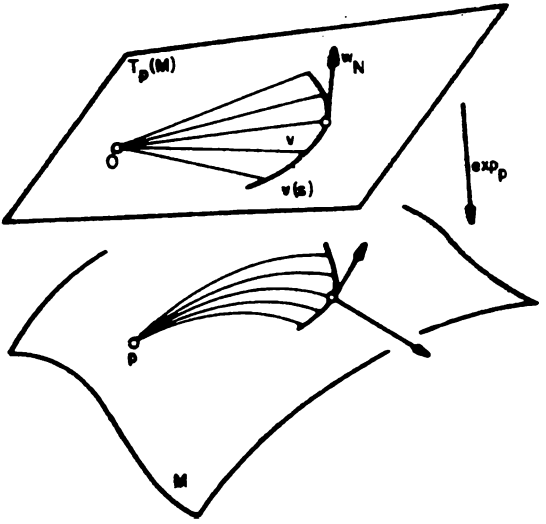


Figura 2

Segue-se daí que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ e independente de t. Como

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \lim_{t\to 0} (d\exp_p)_{tv}\, tw_N = 0,$$

concluimos que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (1,0) = 0$, o que junto com (3) prova o lema. □

É conveniente usar a seguinte terminologia. Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM, $\exp_p V = U$ é chamada uma *vizinhança normal* de p. Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a *bola normal* (ou *geodésica*) de centro p e raio ε. Pelo lema de Gauss, a fronteira de uma bola normal é uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) em M ortogonal às geodésicas que partem de p; ela é denotada por $S_\varepsilon(p)$ e denominada *esfera normal* (ou *geodésica*). As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadas *geodésicas radiais.*

Mostraremos agora que as geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

3.6 Proposição. *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p, e $B \subset U$ uma bola normal de centro p. Seja $\gamma\colon [0,1] \to B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c\colon [0,1] \to M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ então $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.*

Demonstração: Suporemos inicialmente que $c([0,1]) \subset B$. Como $\exp_p$ é um difeomorfismo em U, $c(t)$, $t \neq 0$, pode ser escrito univocamente como $\exp_p(r(t)\cdot v(t)) = f(r(t),t)$ onde $t \to v(t)$ é uma curva em T_pM com $|v(t)| = 1$ e $r\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função positiva diferenciável por partes (podemos supor que se $t_1 \in (0,1]$ então $c(t_1) \neq p$; caso contrário abandonaríamos o intervalo $[0,t_1)$). Logo, exceto para um número finito de pontos,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r}\, r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}\,.$$

Pelo lema de Gauss, $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$. Como $\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| = 1$,

$$\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = |r'(t)|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 \geq |r'(t)|^2 \tag{1}$$

donde

$$\int_\varepsilon^1 \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'(t)|dt \geq \int_\varepsilon^1 r'(t)dt = r(1) - r(\varepsilon). \tag{2}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$, pois $r(1) = \ell(\gamma)$.

É claro que se a desigualdade (1), ou a segunda desigualdade em (2), é estrita então $\ell(c) > \ell(\gamma)$. Logo, se $\ell(c) = \ell(\gamma)$, então $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| = 0$, isto é, $v(t) = \text{const.}$, e $|r'(t)| = r'(t) > 0$. Segue-se daí que c é uma reparametrização monótona de γ, donde $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Se $c([0,1])$ não está contido em B, consideramos o primeiro ponto $t_1 \in (0,1)$ para o qual $c(t_1)$ pertence à fronteira de B. Se ρ é o raio da bola geodésica B, temos:

$$\ell(c) \geq \ell_{[0,t_1]}(c) \geq \rho > \ell(\gamma). \qquad \square$$

Convém observar que a proposição acima não é global. Se consideramos um arco suficientemente grande de geodésica ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto p não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de p.

Por outro lado, se uma curva c, diferenciável por partes, é minimizante, provaremos que c é geodésica. Para isso necessitamos de um refinamento da Proposição 2.9, onde provamos a existência de vizinhanças normais. Mostraremos abaixo que para cada $p \in M$ existe uma vizinhança W de p que é vizinhança normal de cada $q \in W$.

3.7 Teorema. *Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança W de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in W$, $\exp_q$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_qM$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$, isto é, W é vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$, V e $\mathcal{U}$ como na Proposição 2.7. Definimos $F: \mathcal{U} \to M \times M$ por $F(q, v) = (q, \exp_q v)$. Recordamos que $\mathcal{U} \subset TU$, onde U é o domínio de um sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}$ em p, com $V \subset \boldsymbol{x}(U)$. Consideremos em $F(p, 0) = (p, p) \in M \times M$ o sistema de coordenadas $(U \times U; (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}))$. Assim, a matriz de $dF_{(p,0)}$ é

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

pois $(d\exp_p)_0 = I$. Logo F é um difeomorfismo local numa vizinhança de $(p, 0)$. Isto significa que existe uma vizinhança $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de $(p, 0)$ em TM tal que F aplica $\mathcal{U}'$ difeomorficamente sobre uma vizinhança W' de (p, p) em $M \times M$. É possível escolher $\mathcal{U}'$ da forma

$$\mathcal{U}' = \{(q, v); q \in V', v \in T_qM, |v| < \delta\},$$

onde $V' \subset V$ é uma vizinhança de p em M. Escolha agora uma vizinhança $W \subset M$ de p tal que $W \times W \subset W'$. Afirmamos que W e δ assim obtidos satisfazem o enunciado da Proposição.

Com efeito, se $q \in W$ e $B_\delta(0) \subset T_qM$ então, como F é um difeomorfismo em $\mathcal{U}'$, tem-se

$$F(\{q\} \times B_\delta(0)) \supset \{q\} \times W.$$

Pela definição de F, $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$. □

3.8 Observação. Da proposição acima e da propriedade de minimização das geodésicas, segue-se que dados dois pontos $q_1, q_2 \in W$ existe uma única geodésica minimizante γ de comprimento $< \delta$ ligando q_1 a q_2. A prova mostra também que γ depende diferenciavelmente de (q_1, q_2) no seguinte sentido: dado (q_1, q_2) existe um único $v \in T_{q_1}M$ (dado por $F^{-1}(q_1, q_2) = (q_1, v)$) que depende diferenciavelmente de (q_1, q_2) e é tal que $\gamma'(0) = v$.

É conveniente chamar W uma *vizinhança totalmente normal* de $p \in M$.

3.9 Corolário. *Se uma curva diferenciável por partes $\gamma: [a, b] \to M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem*

comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular γ é regular.

Demonstração: Sejam $t \in [a,b]$ e W uma vizinhança totalmente normal de $\gamma(t)$. Existe um intervalo fechado $I \subset [a,b]$, com interior não vazio, $t \in I$, tal que $\gamma(I) \subset W$; a restrição $\gamma_I \colon I \to W$ é então uma curva diferenciável por partes ligando dois pontos de uma bola normal. Pela hipótese e pela Proposição 3.6, $\ell(\gamma_I)$ é igual ao comprimento de uma geodésica radial ligando esses dois pontos. Ainda pela Proposição 3.6, e pelo fato de γ_I estar parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, γ_I é uma geodésica em I, e portanto em t. □

Usando o corolário acima, podemos determinar as geodésicas do plano de Lobatchevski. Convém observar o fato, facilmente verificável, que as isometrias de uma variedade Riemanniana levam geodésicas em geodésicas.

3.10 Exemplo. Seja G o semi-plano superior, isto é, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ com a métrica Riemanniana $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Mostraremos que o segmento $\gamma \colon [a,b] \to G$, $a > 0$, do eixo dos y, dado por $\gamma(t) = (0,t)$ é a imagem de uma geodésica. De fato, para qualquer arco $c \colon [a,b] \to G$ dado por $c(t) = (x(t), y(t))$ com $c(a) = (0,a)$ e $c(b) = (0,b)$, temos que

$$\ell(c) = \int_a^b \left|\frac{dc}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{y}$$
$$\geq \int_a^b \left|\frac{dy}{dt}\right| \frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = \ell(\gamma).$$

Segue-se que γ minimiza arcos diferenciáveis por partes, e, do Corolário 3.9, que a imagem de γ é uma geodésica.

É fácil ver que as isometrias de G (cf. Exercício 4 do Cap. I)

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = x+iy, \quad ad-bc = 1,$$

transformam o eixo $0y$ em semi-círculos superiores ou em semi-retas $x = x_0\,, \quad y > 0$. Estas curvas são, portanto, geodésicas em G. Em verdade, estas são todas as geodésicas de G, pois por cada $p \in G$ e cada direção em T_pG passa um tal círculo com centro no eixo $0x$ (Fig. 3. no caso especial em que a direção é normal a $0x$, o círculo degenera em uma reta normal a $0x$).

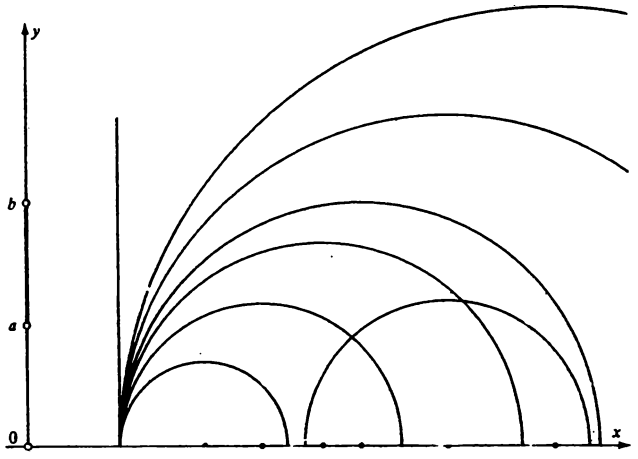


Figura 3. *Geodésicas do plano de Lobatchevski.*

4 Vizinhanças convexas

Vimos no Teorema 3.7 (Cf. Observação 3.8) que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança totalmente normal, isto é, uma vizinhança W e um número $\delta > 0$ tais que quaisquer dois pontos $q_1, q_2 \in W$ podem ser ligados por uma geodésica minimizante de comprimento $< \delta$. Pode acontecer, entretanto, que uma tal geodésica não esteja contida em W. Diremos que um conjunto $S \subset M$ é *fortemente convexo* se para quaisquer dois pontos q_1 , q_2 do fecho $\overline{S}$ de S existe uma única geodésica minimizante γ ligando q_1 a q_2 cujo interior está contido em S. Vamos agora provar que o raio de uma bola totalmente normal pode ser escolhido de modo que ela se torne fortemente convexa.

4.1 Lema. *Para cada $p \in M$ existe um número $c > 0$ tal que qualquer geodésica de M que é tangente em $q \in M$ à esfera geodésica $S_r(p)$ de raio $r < c$ está fora da bola geodésica $B_r(p)$ numa vizinhança de q.*

Demonstração: Seja W uma vizinhança totalmente normal de p. Usando o lema de homogeneidade, podemos supor, restringindo convenientemente o intervalo da definição, que todas as geodésicas de W têm velocidade um. Podemos, portanto, nos restringir ao fibrado tangente unitário T_1W dado por

$$T_1W = \{(q, v);\ q \in W,\ v \in T_qM,\ |v| = 1\}.$$

Seja $\gamma\colon I \times T_1W \to M$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação diferenciável tal que $t \to \gamma(t, q, v)$ é a geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, $|v| = 1$. Definimos $u(t, q, v) = \exp_p^{-1}(\gamma(t, q, v))$ e

$$F\colon I \times T_1W \to R, \quad F(t, q, v) = |u(t, q, v)|^2.$$

F mede o quadrado da "distância" a p de um ponto que se desloca sobre a geodésica γ (Fig. 4). É claro que u e F são diferenciáveis, e que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u \right\rangle + 2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2.$$

Seja agora $r > 0$ tal que

$$\exp_p B_r(0) = B_r(p) \subset W.$$

Se uma geodésica γ é tangente à esfera geodésica $S_r(p)$ no ponto $q = \gamma(0, q, v)$, então, pelo lema de Gauss,

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(0, q, v), u(0, q, v) \right\rangle = 0,$$

isto é, $\frac{\partial F}{\partial t}(0, q, v) = 0$. Se mostrarmos que, para r suficientemente pequeno, o ponto crítico $(0, q, v)$ de F é um ponto de mínimo estrito, teremos concluido a demonstração.

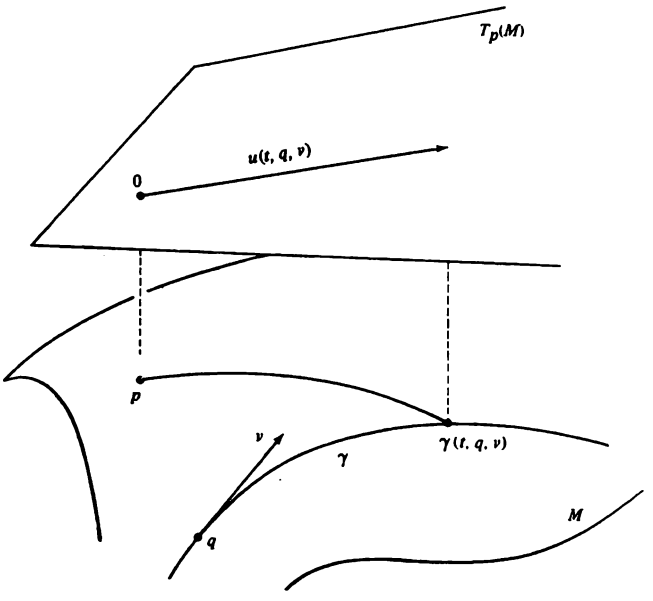


Figura 4

Para isto basta observar que para $q = p$, temos $u(t, p, v) = tv$ e, portanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, p, v) = 2|v|^2 = 2.$$

Decorre daí que existe uma vizinhança $V \subset W$ de p tal que $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, q, v) > 0$, para todo $q \in V$ e todo $v \in T_pM$, $|v| = 1$. Seja $c > 0$ tal que

$$\exp_p B_c(0) \subset V.$$

Pelo visto anteriormente, toda geodésica em $B_c(p)$ que é tangente a uma esfera geodésica de raio $r < c$ no ponto $\gamma(0, q, v)$ é tal que F tem um mínimo estrito local em $(0, q, v)$. Logo, em uma vizinhança de q os pontos de γ estão fora da bola $B_r(p)$. □

4.2 Proposição (vizinhanças convexas). *Para cada $p \in M$ existe um número $\beta > 0$ tal que a bola geodésica $B_\beta(p)$ é fortemente convexa.*

Demonstração: Seja c o número dado no Lema 4.1. Escolha $\delta > 0$ e W no Teorema 3.7 de modo que $\delta < \frac{c}{2}$. Tome $\beta < \delta$ tal

que $B_\beta(p) \subset W$. Provaremos que $B_\beta(p)$ é fortemente convexa. Sejam $q_1, q_2 \in \overline{B_\beta(p)}$ e γ a (única) geodésica de comprimento $< 2\delta < c$ ligando q_1 a q_2. É claro que γ está contida em $B_c(p)$ (Fig. 5).

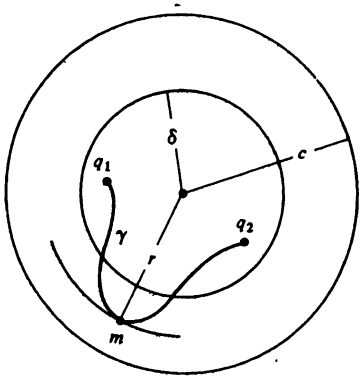


Figura 5

Se o interior de γ não está contido em $B_\beta(p)$, então existe um ponto m no interior de γ onde a distância máxima r de p a γ é atingida. Os pontos de γ numa vizinhança de m estarão no fecho de $B_r(p)$. Como $m \in B_c(p)$ isto contradiz o Lema 4.1 e demonstra a proposição. □

Exercícios

1. (*Geodésicas de superfícies de revolução*). Indique por (u, v) as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$. Mostre que a função $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\operatorname{sen} u, g(v))$,

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u_0 < u < u_1;\ v_0 < 0 < v_1\},$$

onde f e g são funções diferenciáveis, com $f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0$ e $f(v) \neq 0$, é uma imersão. A imagem $\varphi(U)$ é a superfície gerada pela rotação em torno do eixo $0z$ da curva

$(f(v), g(v))$ e é chamada uma *superfície de revolução* S. As imagens por φ das curvas $u =$ constante e $v =$ constante são chamadas *meridianos* e *paralelos*, respectivamente, de S.

a) Mostre que a métrica induzida nas coordenadas (u, v) é dada por

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2.$$

b) Mostre que as equações locais de uma geodésica γ são

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2ff'}{f^2}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f'^2 + (g')^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0.$$

c) Obtenha o seguinte significado geométrico das equações acima: a segunda equação é, exceto para meridianos e paralelos, equivalente ao fato de que a "energia" $|\gamma'(t)|^2$ de uma geodésica é constante ao longo de γ; a primeira equação significa que se $\beta(t)$ é o ângulo orientado, $\beta(t) < \pi$, de γ com um paralelo P intersectando γ em $\gamma(t)$, então

$$r \cos \beta = \text{ const.},$$

onde r é o raio do paralelo P (a equação acima é chamada *relação de Clairaut*).

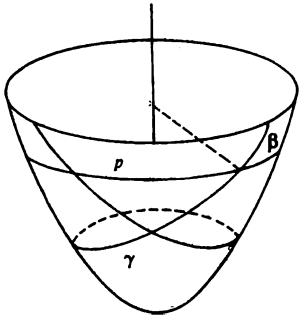


Figura 6. *Geodésicas de um parabolóide.*

d) Use a relação de Clairaut para mostrar que uma geodésica de um parabolóide

$$(f(v) = v,\ g(v) = v^2,\ 0 < v < \infty,\ -\varepsilon < u < 2\pi + \varepsilon),$$

que não é um meridiano, se auto-intersecta um número infinito de vezes (Fig. 6).

2. É possível introduzir uma métrica Riemanniana no fibrado tangente TM de uma variedade Riemanniana M da maneira seguinte. Sejam $(p, v) \in TM$ e V, W vetores tangentes de TM em (p, v). Escolha curvas em TM

$$\alpha\colon t \to (p(t), v(t)),\quad \beta\colon s \to (q(s), w(s)),$$

com $p(0) = q(0) = p$, $\quad v(0) = w(0) = v$, e $V = \alpha'(0)$, $W = \beta'(0)$. Defina um produto interno em TM por

$$\langle V, W\rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(W)\rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0)\right\rangle_p,$$

onde $d\pi$ é a diferencial de $\pi\colon TM \to M$, $\pi(p, v) = p$.

a) Prove que este produto interno está bem definido e introduz uma métrica Riemanniana em TM.

b) Um vetor em $(p, v) \in TM$ que é ortogonal (na métrica acima) à fibra $\pi^{-1}(p) \approx T_pM$ é chamado um *vetor horizontal.* Uma curva

$$t \to (p(t), v(t))$$

em TM é *horizontal* se seu vetor tangente é horizontal para todo t. Prove que a curva

$$t \to (p(t), v(t))$$

é horizontal se e somente se o campo de vetores $v(t)$ é paralelo ao longo de $p(t)$ em M.

c) Prove que o campo geodésico é um campo de vetores horizontal (i.e., é horizontal em cada ponto).

d) Prove que as trajetórias do campo geodésico são geodésicas de TM na métrica acima.

Sugestão: Seja $\bar{\alpha}(t) = (\alpha(t), v(t))$ uma curva em TM. Mostre que $\ell(\bar{\alpha}) \geq \ell(\alpha)$ e que a igualdade se verifica se v é paralelo ao longo de α. Considere, em seguida, uma trajetória do fluxo geodésico passando por (p, v) que é localmente da forma $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde $\gamma(t)$ é uma geodésica em M. Escolha vizinhanças convexas $W \subset TM$ de (p, v) e $V \subset M$ de p tais que $\pi W = V$. Tome dois pontos $Q_1 = (q_1, v_1)$, $Q_2 = (q_2, v_2)$ em $\bar{\gamma} \cap W$. Se $\bar{\gamma}$ não é geodésica, existe uma curva $\bar{\alpha}$ em W passando por Q_1 e Q_2 tal que $\ell(\bar{\alpha}) < \ell(\bar{\gamma}) = \ell(\gamma)$. Seja $\alpha = \pi(\bar{\alpha})$; como $\ell(\alpha) \leq \ell(\bar{\alpha})$, isto contradiz o fato de ser γ uma geodésica.

e) Um vetor em $(p, v) \in TM$ é chamado *vertical* se ele é tangente à fibra $\pi^{-1}(p) \approx T_pM$. Mostre que:

$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(W), d\pi(W) \rangle_p, \quad \text{se } W \text{ é horizontal,}$$
$$\langle W, W \rangle_{(p,v)} = \langle W, W \rangle_p, \quad \text{se } W \text{ é vertical,}$$

onde estamos identificando o espaço tangente à fibra com T_pM.

3. Sejam G um grupo de Lie, $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie, e $X \in \mathcal{G}$ (v. Exemplo 2.6, Cap. I). As trajetórias de X determinam uma aplicação $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ com $\varphi(0) = e$, $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.

a) Prove que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\varphi(t + s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$, ($\varphi\colon \mathbb{R} \to G$ é então chamado um *subgrupo a 1-parâmetro* de G).

Sugestão: Seja $\varphi(t_0) = y$, $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Mostre que, pela invariância à esquerda, $t \to y^{-1}\varphi(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é

também uma curva integral de X passando por e para $t = t_0$. Por unicidade, $\varphi(t_0)^{-1}\varphi(t) = \varphi(t - t_0)$, donde φ pode ser estendida além de t_0 em um intervalo de amplitude ε. Isto mostra que $\varphi(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, $\varphi(t_0)^{-1} = \varphi(-t_0)$ e, como t_0 é arbitrário, obtemos $\varphi(t + s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$.

b) Prove que se G tem uma métrica bi-invariante $\langle\ ,\ \rangle$ então as geodésicas de G que partem de e são os subgrupos a 1-parâmetro de G.

Sugestão: Use a relação (v. Eq. (9) do Cap. II)

$$2(X, \nabla_Z Y) = Z\langle X, Y\rangle + Y\langle X, Z\rangle - X\langle Y, Z\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle$$

e o fato que a métrica é invariante à esquerda para provar que $\langle X, \nabla_Y Y\rangle = \langle Y, [X, Y]\rangle$, onde X, Y e Z são campos invariantes à esquerda. Use também o fato que a bi-invariância de $\langle\ ,\ \rangle$ implica que

$$\langle [U, X], V\rangle = -\langle U, [V, X]\rangle, \quad X, U, V \in \mathcal{G}.$$

Segue-se que $\nabla_Y Y = 0$, para todo $Y \in \mathcal{G}$. Assim subgrupos a 1-parâmetro são geodésicas. Por unicidade, geodésicas são subgrupos a 1-parâmetro.

4. Um subconjunto A de uma variedade diferenciável M é *contrátil* a um ponto $a \in A$ quando as aplicações id_A (identidade em A) e $k_a\colon x \in A \to a \in A$ forem homotópicas (com ponto base a). A é *contrátil* se o for a um de seus pontos.

a) Mostre que as vizinhanças convexas em uma variedade Riemanniana M são subconjuntos contráteis (a qualquer de seus pontos).

b) Seja M uma variedade diferenciável. Mostre que existe uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M com as seguintes propriedades:

i) U_α é um aberto contrátil, para cada α.

ii) Se $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}$ são elementos da cobertura, então $\bigcap_1^r U_{\alpha_i}$ é contrátil.

5. Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. Seja $p \in M$ e sejam $U \subset M$ uma vizinhança de p, e $\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ uma aplicação diferenciável tais que para todo $q \in U$ a curva $t \to \varphi(t, q)$ é a trajetória de X passando por q em $t = 0$ (U e φ são dados pelo teorema fundamental das equações diferenciais ordinárias, Cf. Teorema 2.2). X é chamado um *campo de Killing* (ou uma *isometria infinitesimal*) se, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi(t_0)\colon U \subset M \to M$ é uma isometria. Prove que:

   a) Um campo linear em $\mathbb{R}^n$, definido por uma matriz A, é um campo de Killing se e só se A é anti-simétrica.

   b) Seja X um campo de Killing em M, $p \in M$, e U uma vizinhança normal de p em M. Admita que p é o único ponto de U que satisfaz $X(p) = 0$. Então, em U, X é tangente às esferas geodésicas centradas em p.

   c) Sejam X um campo diferenciável de vetores em M e $f\colon M \to N$ uma isometria. Seja Y o campo de vetores em N definido por $Y(f(p)) = df_p(X(p))$, $p \in M$. Então Y é um campo de Killing se e somente se X também o for.

   d) X é de Killing $\Leftrightarrow \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$ para todo $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ (a equação acima é chamada *equação de Killing*).

Sugestão para $\Rightarrow$: Por continuidade, basta provar a equação acima para pontos $q \in U$ onde $X(q) \neq 0$. Se este é o caso, seja $S \subset U$ uma subvariedade de U passando por q, com $\dim S = \dim M - 1$, e normal a $X(q) \neq 0$ em q. Sejam $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ coordenadas em uma vizinhança $V \subset S$ de

q tais que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ são coordenadas em uma vizinhança $V \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ e $X = \frac{\partial}{\partial t}$. Fazendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, obtém-se

$$\langle \nabla_{X_j} X, X_i \rangle + \langle \nabla_{X_i} X, X_j \rangle = X\langle X_i, X_j \rangle - \langle [X, X_i], X_j \rangle$$
$$- \langle [X, X_j], X_i \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle X_i, X_j \rangle = 0,$$

onde na última igualdade foi usado o fato de ser X um campo de Killing.

e) Seja X um campo de Killing em M com $X(q) \neq 0$, $q \in M$. Então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança de q, de modo que os coeficientes g_{ij} da métrica neste sistema de coordenadas não dependem de x_n.

6. Seja X um campo de Killing (Cf. Exercício 5) em uma variedade Riemanniana M conexa. Admita que existe um ponto $q \in M$ tal que $X(q) = 0$ e $\nabla_Y X(q) = 0$, para todo $Y(q) \in T_q M$. Prove que $X \equiv 0$.
Sugestão: Mostre que, para todo t, a isometria local $\varphi(t, \,) : U \subset M \to M$ gerada pelo campo X (Cf. Exercício 5) deixa o ponto q fixo e sua diferencial em q é a aplicação linear identidade de $T_q M$. Para isto, observe que $d\varphi_t \colon T_q M \to T_q M$ para todo t. Além disto, $[X, Y](q) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(q) = 0$, por hipótese. Como

$$0 = [Y, X](q) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [d\varphi_t - \mathrm{Id}](Y) = \frac{d}{dt}(d\varphi_t)\Big|_{t=0}$$

e $d\varphi_{s+t} = d\varphi_s \cdot d\varphi_t$, conclui-se que $d\varphi_t$ não depende de t e é igual a Id. Use agora a aplicação exponencial para mostrar que uma tal isometria é a identidade em M.

7. (*Referencial geodésico*). Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Mostre que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \ldots, E_n \in$

$\mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família E_i, $i = 1, \ldots, n$, de campos de vetores é chamada um *referencial* (local) *geodésico* em p.

8. Seja M uma variedade Riemanniana. Sejam $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Defina *divergência* de X como a função $\operatorname{div} X\colon M \to \mathbb{R}$ dada por $\operatorname{div} X(p) =$ traço da aplicação linear $Y(p) \to \nabla_Y X(p)$, $p \in M$, e *gradiente* de f como o campo vetorial $\operatorname{grad} f$ em M definido por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = df_p(v), \quad p \in M,\ v \in T_pM.$$

a) Seja E_i, $i = 1, \ldots, n = \dim M$, um referencial geodésico em $p \in M$ (V. Exercício 7). Mostre que:

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(f))E_i(p),$$

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f_i)(p), \text{ onde } X = \sum_i f_i E_i\,.$$

b) Suponha que $M = \mathbb{R}^n$, com coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = e_i$. Mostre que:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i\,,$$

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,, \text{ onde } X = \sum_i f_i e_i\,.$$

9. Seja M uma variedade Riemanniana. Defina um operador $\Delta\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ (o *Laplaciano* de M) por

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

a) Seja E_i um referencial geodésico em $p \in M$, $i = 1, \ldots, n = \dim M$ (v. Exercício 7). Mostre que

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p).$$

Conclua daí que se $M = \mathbb{R}^n$, Δ coincide com o Laplaciano usual, a saber, $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

b) Mostre que

$$\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle.$$

10. Seja $f\colon [0,1]\times[0,a] \to M$ uma superfície parametrizada tal que para todo $t_0 \in [0,a]$, a curva $s \to f(s,t_0)$, $s \in [0,1]$, é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, ortogonal à curva $t \to f(0,t)$, $t \in [0,a]$, no ponto $f(0,t_0)$. Mostre que, para todo $(s_0,t_0) \in [0,1] \times [0,a]$, as curvas $s \to f(s,t_0)$, $t \to f(s_0,t)$ são ortogonais.
Sugestão: Derive $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle$ em relação a s, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

onde usamos a simetria da conexão e o fato que $\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s} = 0$.

†11. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Seja ν a forma diferencial do grau $n = \dim M$ definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\nu(v_1, \ldots, v_n)(p) &= \sqrt{\det(\langle v_i, v_j\rangle)} \\ &= \text{vol. orient. } \{v_1, \ldots, v_n\},\ p \in M,\end{aligned}$$

onde $v_1, \ldots, v_n \in T_p(M)$ são linearmente independentes, e o volume orientado é afetado do sinal + ou − conforme a

base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ pertença à orientação de M ou não; ν é chamado o *elemento de volume* de M. Para todo campo $X \in \mathcal{X}(M)$ defina o *produto interior* $i(X)\nu$ de X por ν como a $(n-1)$-forma:

$$i(X)\nu(Y_2, \ldots, Y_n) = \nu(X, Y_2, \ldots, Y_n), Y_2, \ldots, Y_n \in \mathcal{X}(M).$$

Prove que

$$d(i(X)\nu) = \operatorname{div} X\nu.$$

Sugestão: Seja $p \in M$ e E_i um referencial geodésico em p. Escreve $X = \sum f_i E_i$. Sejam ω_i formas diferenciais de grau um definidas em uma vizinhança de p por $\omega_i(E_i) = \delta_{ij}$. Mostre que $\omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$ é a forma volume ν de M. Em seguida, faça $\theta_i = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_n$, onde $\hat{\omega}_i$ significa que o fato $\hat{\omega}_i$ não está presente. Mostre que $i(X)\nu = \sum_i (-1)^{i+1} f_i \theta_i$. Decorre daí que

$$\begin{aligned} d(i(X)\nu) &= \sum_i (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_i (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i \\ &= \left(\sum_i E_i(f_i) \right) \nu + \sum_i (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i . \end{aligned}$$

Mas $d\theta_i = 0$ em p, pois

$$\begin{aligned} d\omega_k(E_i, E_j) &= E_i \omega_k(E_j) - E_j \omega_k(E_i) - \omega_k([E_i, E_j]) \\ &= \omega_k(\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i). \end{aligned}$$

Portanto

$$d(i(X)\nu)(p) = \left(\sum_i E_i(f_i)(p) \right) \nu = \operatorname{div} X(p)\nu$$

como p é arbitrário, segue-se o pedido.

Observação. O resultado obtido significa que a noção de divergência de X tem sentido em uma variedade diferenciável orientável na qual foi escolhido um "elemento de volume", isto é, uma n-forma ν que toma valores positivos em bases positivas.

†12. (*Teorema de E. Hopf*). Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em M com $\Delta f \geq 0$. Então $f = \text{const.}$. Em particular, as funções harmônicas em M, isto é, aquelas para as quais $\Delta f = 0$ são constantes.
Sugestão: Faça $\operatorname{grad} f = X$. Usando o teorema de Stokes e o resultado do Exercício 11, obtém-se

$$\int_M \Delta f \nu = \int_M \operatorname{div} X \nu = \int_M d(i(X)\nu) = \int_{\partial M} i(X)\nu = 0.$$

Como $\Delta f \geq 0$, temos $\delta f = 0$. Usando de novo o teorema de Stokes para $f^2/2$ e o resultado do Exercício 9(b), obteremos

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \Delta(f^2/2)\nu &= \int_M f\Delta f \nu + \int_M |\operatorname{grad} f|^2 \nu \\ &= \int_M |\operatorname{grad} f|^2 \nu, \end{aligned}$$

o que, junto com a conexidade de M, implica que $f = \text{const.}$.

†13. Seja M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. Seja $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Escolha um sistema de coordenadas $(t, x_2, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança U de p tal que $\frac{\partial}{\partial t} = X$. Mostre que se $\nu = g\, dt \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é o elemento de volume de M, então

$$i(X)\nu = g\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\,.$$

Conclua daí, usando o resultado do Exercício 11, que

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}\,.$$

Isto mostra que $\operatorname{div} X$ mede intuitivamente o grau de variação do elemento de volume de M ao longo das trajetórias de X.

14. (*Teorema de Liouville*). Prove que se G é o campo geodésico de TM então $\operatorname{div} G = 0$. Conclua daí que o fluxo geodésico preserva o volume de TM.
Sugestão: Seja $p \in M$ e considere um sistema $(u_1, \ldots, u_n)$ de *coordenadas normais* em p. Tais coordenadas são definidas em uma vizinhança normal U de p considerando uma base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM e tomando como $(u_1, \ldots, u_m)$ as coordenadas de $q = \exp_p \left(\sum_i u_i e_i \right)$, $i = 1, \ldots, n$. Em um tal sistema de coordenadas, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, pois as geodésicas que passam por p são dadas por equações lineares. Portanto, se $X = \sum x_i \frac{\partial}{\partial u_i}$, então $\operatorname{div} X(p) = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u_i}$.
Sejam agora (u_i) coordenadas normais em uma vizinhança $U \subset M$ em torno de $p \in M$ e (u_i, v_j), $v = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial u_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, coordenadas em TM. Calcule o elemento de volume da métrica natural de TM em (q, v), $q \in U$, $v \in T_qM$, e mostre que ele é o elemento de volume da métrica produto em $U \times U$ no ponto (q, q) (v. Exercício 2(e)). Como a divergência de G só depende do elemento de volume (v. Exercício 11), e G é horizontal, podemos calculá-la na métrica produto. Observe que nas coordenadas (u_i, v_j) tem-se

$$G(u_i) = v_i\,, \quad G(v_j) = -\sum_{ik} \Gamma_{ik}^j\, v_i v_k\,, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Como os símbolos de Christoffel da métrica produto em $U \times U$ são nulos em (p, p), obteremos finalmente, em p,

$$\operatorname{div} G = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\sum_{ik} \Gamma_{ik}^j\, v_i v_k \right) = 0.$$

Capítulo IV

Curvaturas

1 Introdução

A noção de curvatura em uma variedade Riemanniana foi introduzida por Riemann (v. Riemann [Ri]) de uma maneira bastante geométrica, que passamos a descrever. Seja p um ponto de uma variedade Riemanniana M e seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente T_pM a M em p. Considere o conjunto das geodésicas que partem de p e são tangentes a σ. Os segmentos de tais geodésicas em uma vizinhança normal $U \subset M$ de p determinam uma subvariedade de dimensão dois $S \subset M$ (na linguagem atual, S é a imagem de $\exp_p$ restrita a $\sigma \cap \exp_p^{-1}(U)$). S possui uma métrica induzida pela inclusão. Como Gauss havia provado que a curvatura de uma superfície se exprimia em termos de sua métrica, Riemann podia falar na curvatura de S em p, e indicá-la por $K(p, \sigma)$, (na linguagem atual, $K(p, \sigma)$ é a curvatura seccional de M em p segundo σ). Esta foi a curvatura considerada por Riemann em [Ri]. Ela é uma generalização natural da curvatura Gaussiana das superfícies e é claro que se $M = \mathbb{R}^n$, $K(p, \sigma) = 0$ para todo p e todo σ.

Riemann não indicou uma maneira de calcular a curvatura seccional a partir da métrica de M, o que só foi feito anos mais tarde por Christoffel (v. Christoffel [Cf]; Cf. também

Eq. (2) deste capítulo). Em verdade, todo o trabalho de Riemann contém apenas uma fórmula, a saber, uma expressão da métrica para a qual $K(p,\sigma) = \text{const.}$ para todo p e todo σ, e mesmo esta fórmula é apresentada sem demonstração. (A fórmula de Riemann será apresentada no Exercício 2(c) do Cap. VIII)

Como acontece freqüentemente em Matemática, uma formulação "trabalhável"do conceito de curvatura levou um longo tempo para ser desenvolvida. Quando finalmente apareceu uma tal formulação, ela possuia, ao lado da vantagem de poder ser usada comodamente para demonstrar teoremas, a desvantagem de estar tão afastada do conceito intuitivo inicial que parecia uma criação arbitrária.

Neste capítulo, apresentaremos uma defininição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana (Cf. Def. 2.1). No Capítulo VI, mostremos que a noção de curvatura seccional (Cf. Def. 3.2) obtida a partir desta definição de curvatura generaliza a noção de curvatura Gaussiana das superfícies, e coincide com o conceito introduzido por Riemann.

2 Curvatura

2.1 Definição. A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y)\colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n),$$

o que implica que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0,$$

como havíamos afirmado. Podemos, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Uma outra maneira de olhar a Definição 2.1 é considerar um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$. Como $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, obteremos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} - \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Estas interpretações são, entretanto, mais ou menos formais. Recomendamos ao leitor que procure se habituar, neste capítulo, com as propriedades formais da curvatura e transfira para o Capítulo VI a prova de uma interpretação mais geométrica da curvatura. Observamos também que é freqüente encontrar na literatura uma definição de curvatura que difere da Definição 2.1 por um sinal.

2.2 Proposição. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$
$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, X_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M).$

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$
$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M), \quad Z, W \in \mathcal{X}(M).$

Demonstração: Verificaremos apenas (ii), deixando (i) a cargo do leitor. A primeira parte de (ii) é óbvia. Quanto à segunda, temos

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) = \nabla_Y(f\nabla_X Z + (Xf)Z) = f\nabla_Y\nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + Xf(\nabla_Y Z) + (Y(Xf))Z.$$

Portanto,

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) = f(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z),$$

ou ainda,

$$R(X,Y)fZ = f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_X\nabla_Y Z + ([Y,X]f)Z + f\nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z = fR(X,Y)Z. \qquad \square$$

2.3 Observação. Uma análise da demonstração acima mostra que a necessidade do aparecimento do termo $\nabla_{[X,Y]}Z$ na definição de curvatura está ligada ao fato de desejarmos que a aplicação $R(X,Y)\colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ seja linear (v. Obs. 2.6 adiante).

2.4 Proposição. (*Primeira Identidade de Bianchi*).

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Demonstração: Pela simetria da conexão Riemanniana, temos,

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z \\ &+ \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_X\nabla_Z Y \\ &- \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]}Y = \nabla_Y[X,Z] + \nabla_Z[Y,X] + \nabla_X[Z,Y] \\ &- \nabla_{[X,Z]}Y - \nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_{[Z,Y]}X = [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] \\ &+ [X,[Z,Y]] = 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade aplicamos a identidade de Jacobi para campos de vetores. $\square$

De agora em diante, escreveremos por conveniência, $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = (X,Y,Z,T)$.

2.5 Proposição. (a) $(X,Y,Z,T)+(Y,Z,X,T)+(Z,X,Y,T)=0$
(b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$
(c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$
(d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Demonstração:
(a) é novamente a identidade de Bianchi;
(b) segue diretamente da Definição 2.1;
(c) é equivalente a $(X,Y,Z,Z) = 0$, o que provaremos a seguir:

$$(X,Y,Z,Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z).$$

Mas

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle,$$

e

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}(X,Y,Z,Z) &= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}Y(X\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle Z,Z\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = -\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0,\end{aligned}$$

o que demonstra (c).

Para demonstrar (d), usaremos (a), e escreveremos:

$$\begin{aligned}(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) &= 0,\\ (Y,Z,T,X) + (Z,T,Y,X) + (T,Y,Z,X) &= 0,\\ (Z,T,X,Y) + (T,X,Z,Y) + (X,Z,T,Y) &= 0,\\ (T,X,Y,Z) + (X,Y,T,Z) + (Y,T,X,Z) &= 0.\end{aligned}$$

Somando-se as equações acima, obtemos

$$2(Z,X,Y,T) + 2(T,Y,Z,X) = 0$$

e, portanto,

$$(Z,X,Y,T) = (Y,T,Z,X). \qquad \square$$

É conveniente escrever o que foi visto acima em um sistema de coordenadas $(U,\boldsymbol{x})$ em torno do ponto $p \in M$. Indicaremos, como de costume, $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$. Ponhamos

$$R(X_i,X_j)X_k = \sum_\ell R^\ell_{ijk}\, X_\ell\,.$$

Assim R^ℓ_{ijk} são as componentes da curvatura R em $(U,\boldsymbol{x})$. Se

$$X = \sum_i u^i X_i\,, \quad Y = \sum_j v^j X_j\,, \quad Z = \sum_k w^k X_k\,,$$

obteremos, pela linearidade de R,

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,\ell} R^\ell_{ijk}\, u^i v^j w^k\, X_\ell\,. \tag{1}$$

Para exprimirmos R^ℓ_{ijk} em termos dos coeficinets Γ^k_{ij} da conexão Riemanniana, escrevemos,

$$\begin{aligned} R(X_i,X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k \\ &= \nabla_{X_j}\Big(\sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}X_\ell\Big) - \nabla_{X_i}\Big(\sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}X_\ell\Big), \end{aligned}$$

o que, por um cálculo direto, fornece

$$R^s_{ijk} = \sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}\,\Gamma^s_{j\ell} - \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\,\Gamma^s_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j}\,\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\,\Gamma^s_{jk}\,. \tag{2}$$

Fazendo

$$\langle R(X_i,X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_\ell R^\ell_{ijk}\, g_{\ell s} = R_{ijks}\,,$$

poderemos escrever as identidades da Proposição 2.5 como:

$$\begin{aligned} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} &= 0 \\ R_{ijks} &= -R_{jiks} \\ R_{ijks} &= -R_{ijsk} \\ R_{ijks} &= R_{ksij}\,. \end{aligned}$$

2.6 Observação. A equação (1), que depende da linearidade do operador R, mostra que o valor de $R(X,Y)Z$ no ponto p depende unicamente dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções R^{ℓ}_{ijk} em p. Observe que isto contrasta com o comportamento da derivada covariante (v. Ob. 2.3, Cap. II), a razão sendo que a derivada covariante não é linear. Em geral, as entidades, como a curvatura, que são lineares, são chamadas tensores em M (maiores detalhes serão dados na Seção 5).

3 Curvatura seccional

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

No que se segue convém usar a seguinte notação. Dado um espaço vetorial V, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2\,|y|^2 - \langle x,y\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

3.1 Proposição. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração: Para evitar cálculos, observemos que podemos passar da base $\{x, y\}$ de σ para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iteração das seguintes transformações elementares:

(a) $\{x, y\} \to \{y, x\}$

(b) $\{x, y\} \to \{\lambda x, y\}$, (c) $\{x, y\} \to \{x + \lambda y, y\}$.

É fácil ver que $K(x, y)$ é invariante por tais transformações, o que demonstra o afirmado. □

3.2 Definição. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Além do fato de que a curvatura seccional tem interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato de que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R. Isto é um fato puramente algébrico:

3.3 Lema. *Seja V um espaço vetorial de dimensão ≥ 2, munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sejam $R\colon V \times V \times V \to V$ e $R'\colon V \times V \times V \to V$ aplicações tri-lineares tais que as condições* (a), (b), (c) *e* (d) *da Proposição 2.5 sejam satisfeitas para*

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t\rangle, \quad (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t\rangle.$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ é o subespaço bi-dimensional gerado por x e y. Se para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Demonstração: Basta provar que $(x, y, z, t) = (x, y, z, t)'$ para quaisquer $x, y, z, t \in V$. Observemos primeiramente que, por hipótese, temos que $(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'$, para todo $x, y \in V$. Então

$$(x + z, y, x + z, y) = (x + z, y, x + z, y)',$$

donde

$$\begin{aligned}&(x, y, x, y) + 2(x, y, z, y) + (z, y, z, y)\\ &= (x, y, x, y)' + 2(x, y, z, y)' + (z, y, z, y)'\end{aligned}$$

e, portanto

$$(x, y, z, y) = (x, y, z, y)',$$

para todo $x, y, z \in V$.

Usando o que acabamos de provar, temos

$$(x, y + t, z, y + t) = (x, y + t, z, y + t)',$$

donde

$$(x, y, z, t) + (x, t, z, y) = (x, y, z, t)' + (x, t, z, y)',$$

que pode ainda ser escrita como

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t) - (y, z, x, t)'.$$

Isto nos leva a concluir que a expressão $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ é invariante por permutações cíclicas dos primeiros três elementos. Portanto, por (a) da Proposição 2.5, temos

$$3\big[(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'\big] = 0,$$

donde

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, t)'$$

para todo $x, y, z, t \in V$. □

As variedades Riemannianas que possuem curvatura seccional constante desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana. Trataremos destas variedades com mais detalhes no Capítulo VIII deste livro. No momento, queremos apenas mostrar como o lema anterior permite obter uma caracterização de tais variedades por meio das componentes $R_{ijk\ell}$ da curvatura em uma base ortonormal. Isto decorre do lema abaixo.

3.4 Lema. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração: Admita que $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_pM$, e faça $\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = (X, Y, W, Z)'$. Observe que R' satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d) da Proposição 2.5. Como

$$(X, Y, X, Y)' = \langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2,$$

temos que, para todo par de vetores $X, Y \in T_pM$,

$$R(X, Y, X, Y) = K_0(|X|^2\,|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2) = K_0 R'(X, Y, X, Y).$$

Pelo Lema 3.3, isto implica que, para todo X, Y, W, Z,

$$R(X, Y, W, Z) = K_0 R'(X, Y, W, Z),$$

donde $R = K_0 R'$. A recíproca é imediata.

3.5 Corolário. *Sejam M uma variedade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $n = \dim M$, uma base ortonormal de T_pM. Escreva $R_{ijk\ell} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_\ell\rangle$, $i, j, k, \ell = 1, \ldots, n$. Então $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_pM$, se e só se*

$$R_{ijk\ell} = K_0(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}),$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Em outras palavras, $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_pM$ se e só se $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$ para todo $i \neq j$, e $R_{ijk\ell} = 0$ nos outros casos.

4 Curvatura de Ricci e curvatura escalar

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta freqüência que elas merecem nomes.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \mathrm{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle,$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Vamos provar que as expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais; elas são chamadas *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar* (ou média) em p, respectivamente.

Para provar estes fatos, daremos uma caracterização intrínseca das expressões acima. Primeiramente, vamos definir uma forma bilinear em T_pM como se segue: sejam $x, y \in T_pM$ e ponhamos

$$Q(x, y) = \text{ traço da aplicação } z \mapsto R(x, z)y.$$

Q é obviamente bilinear. Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = x\}$ para T_pM temos

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle \\ &= \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x), \end{aligned}$$

isto é, Q é simétrica e $Q(x, x) = (n-1)\,\mathrm{Ric}_p(x)$; isso demonstra que $\mathrm{Ric}_p(x)$ está intrinsecamente definida.

Por outro lado, à forma bilinear Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta K, dada por

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_n\}$, temos

$$\begin{aligned}\text{Traço de } K &= \sum_j \langle K(z_j), z_j\rangle = \sum_j Q(z_j, z_j)\\ &= (n-1)\sum_j \mathrm{Ric}_p(z_j) = n(n-1)K(p),\end{aligned}$$

o que demonstra o que havíamos afirmado.

A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é, às vezes, chamada *o tensor de Ricci.*

Convém exprimir o que foi feito acima em um sistema de coordenadas (x_i). Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$, e g^{ij} a matriz inversa de g_{ij} (i.e., $\sum_k g_{ik}g^{k\ell} = \delta_i^\ell$). Então os coeficientes da forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ na base $\{X_i\}$ são dados por

$$\frac{1}{n-1}R_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_j R^j_{ijk} = \frac{1}{n-1}\sum_{sj} R_{ijks}\, g^{sj}.$$

Observe agora que se $A\colon T_pM \to T_pM$ é uma aplicação linear auto-adjunta e $B\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear a ela associada, i.e., $B(X,Y) = \langle A(X), Y\rangle$, então traço $A = \sum_{ik} B(X_i, X_k)g^{ik}$. Portanto, a curvatura escalar no sistema (x_i) é dada por

$$K = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ik} R_{ik}g^{ik}.$$

Para concluir esta seção, vamos estabelecer uma relação que nos será útil futuramente.

Seja $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ uma superfície parametrizada (Cf. Def. 3.3 do Cap. III) e sejam (s,t) as coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $V = V(s,t)$ um campo vetorial ao longo de f. Para cada (s,t), é possível definir $R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V$ de maneira óbvia.

4.1 Lema.

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V. \tag{3}$$

Demonstração: A prova é um longo cálculo. Escolhamos um sistema de coordenadas $(U, \boldsymbol{x})$ em torno de $p \in M$. Seja $V = \sum_i v^i X_i$, onde $v^i = v^i(s,t)$ e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$ Então

$$\frac{D}{\partial s} V = \frac{D}{\partial s}\left(\sum_i v^i X_i\right) = \sum_i v^i \frac{D}{\partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} X_i,$$

e

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s} V\right) = \sum_i v^i \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s}\frac{D}{\partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} X_i.$$

Portanto, trocando s por t na expressão acima, e subtraindo, obteremos

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} V = \sum v^i \left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} X_i\right).$$

Calculemos agora $\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X_i$. Ponhamos

$$f(s,t) = (x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)).$$

Então $\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j$ e $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t} X_k$. Assim, temos

$$\frac{D}{\partial s} X_i = \nabla_{\sum_j (\partial x_j/\partial s) X_j}(X_i) = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i$$

e

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} X_i &= \frac{D}{\partial t}\left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i\right) \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\sum_k (\partial X_k/\partial t) X_k}(\nabla_{X_j} X_i) \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t} \nabla_{X_k}\nabla_{X_j} X_i,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\right) X_i = \sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\left(\nabla_{X_k}\nabla_{X_j}X_i - \nabla_{X_j}\nabla_{X_k}X_i\right).$$

Juntando todo o anterior, obtemos finalmente

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\right) V &= \sum_{ijk} v^i \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t} R(X_j, X_k)X_i \\ &= R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) V. \qquad \square\end{aligned}$$

5 Tensores em variedades Riemannianas

A noção de curvatura é um caso particular da noção de tensor que é um objeto útil em Geometria Diferencial. Apresentaremos aqui uma rápida introdução ao estudo de tensores em uma variedade Riemanniana. A idéia de tensor é uma generalização natural da idéia de campos de vetores, e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Para o que se segue convém observar que $\mathcal{X}(M)$ é um módulo sobre $\mathcal{D}(M)$, isto é, $\mathcal{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de $\mathcal{D}(M)$.

5.1 Definição. Um *tensor T de ordem r* em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$\underbrace{T\colon \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \to \mathcal{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, \ldots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$\begin{aligned}T(Y_1, \ldots, fX + gY, \ldots, Y_r) &= fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) \\ &\quad + gT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Um tensor T é um objeto pontual em um sentido que passamos a explicar. Fixe um ponto $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{X}(M^n)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}$, $i = 1, \ldots, n$, formam uma base de T_qM; diremos, neste caso, que $\{E_i\}$ é um *referencial móvel* em U. Sejam

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \ldots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}, \ i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n,$$

as restrições a U dos campos $Y_1, \ldots, Y_r$, expressas no referencial móvel $\{E_i\}$. Por linearidade,

$$T(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} y_{i_1} \ldots y_{i_r} T(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}).$$

As funções $T(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}) = T_{i_1 \ldots i_r}$ em U são chamadas as *componentes* de T no referencial $\{E_i\}$.

Da expressão acima decorre que o valor de $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores em p das componentes de T, e dos valores de $Y_1, \ldots, Y_r$ em p. É neste sentido que dizemos que T é pontual.

5.2 Exemplo. O *tensor curvatura*

$$R\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$$

é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

É imediato verificar que R é um tensor de ordem 4, cujas componentes no referencial $\left\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ associado a sistemas de coordenadas (x_i) são

$$R(X_i, X_j, X_k, X_\ell) = R_{ijk\ell},$$

5.3 Exemplo. O "tensor métrico" $G\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ é definido por $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. G é um tensor

de ordem 2 e suas componentes no referencial $\{X_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.

5.4 Exemplo. A conexão Riemanniana ∇ definida por:

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{D}(M)$$
$$\nabla(X,Y,Z)=\langle\nabla_X Y,Z\rangle,\quad X,Y,Z\in\mathcal{X}(M),$$

não é um tensor, pois ∇ não é linear em relação ao argumento Y.

5.5 Observação. É possível definir a noção de tensor em uma variedade diferenciável sem métrica Riemanniana. Neste caso, é necessário distinguir os tensores covariantes (que acabamos de definir) dos tensores contravariantes (que poderíamos definir de maneira análoga, utilizando no lugar de $\mathcal{X}(M)$ o seu dual $\mathcal{X}^*(M)$). Em uma variedade Riemanniana isto é desnecessário, pois a métrica Riemanniana faz corresponder a cada $X\in\mathcal{X}(M)$ um único elemento $\omega\in\mathcal{X}^*(M)$ dado por

$$\omega(Y)=\langle X,Y\rangle,\quad \text{para todo}\quad Y\in\mathcal{X}(M).$$

Tal correspondência permite identificar os tensores contravariantes com os tensores covariantes. Por medida de economia, nos restringimos aos tensores covariantes.

5.6 Observação. Por várias razões, convém identificar o campo $X\in\mathcal{X}(M)$ com o tensor $X\colon\mathcal{X}(M)\to\mathcal{D}(M)$ dado por $X(Y)=\langle X,Y\rangle$, para todo $Y\in\mathcal{X}(M)$.

É possível estender aos tensores a noção de derivada covariante. Mostremos dentro em pouco que a seguinte definição é bastante natural.

5.7 Definição. Seja T um tensor de ordem r. A *diferencial covariante* ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por

$$\begin{aligned}\nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z)&=Z(T(Y_1,\ldots,Y_r))-T(\nabla_Z Y_1,\ldots,Y_r)\\&\quad-\cdots-T(Y_1,\ldots,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r).\end{aligned}$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a *derivada covariante* $\nabla_Z T$ *de* T *em relação a* Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z).$$

Vamos mostrar que, em um referencial conveniente, a definição de derivada covariante de um tensor T em relação a $Z \in \mathcal{X}(M)$ se torna de fato natural. Para isto, seja $p \in M$ e seja $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(t) = Z(\alpha(t))$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de T_pM e seja $e_i(t)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de $\alpha = \alpha(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Sejam $T_{i_1 \ldots i_r}(t)$ as componentes, na base $\{e_i(t)\}$, da restrição $T(\alpha(t))$ de T à curva α. Então, por definição de $\nabla_Z T$,

$$\begin{aligned}(\nabla_Z T)(e_{i_1}(t), \ldots, e_{i_r}(t)) = \frac{d}{dt} T_{i_1 \ldots i_r}(t) - T(\nabla_Z\, e_{i_1}(t), \ldots, e_{i_r}(t)) \\ - \cdots - T(e_{i_1}(t), \ldots, \nabla_Z\, e_{i_r}(t)).\end{aligned}$$

Como $\nabla_Z\, e_i(t) = 0$, teremos, por linearidade,

$$(\nabla_Z T)_{i_1 \ldots i_r} = (\nabla_Z T)(e_{i_1}(t), \ldots, e_{i_r}(t)) = \frac{d}{dt}\, T_{i_1 \ldots i_r}\,.$$

Em outras palavras, neste referencial, as componentes da derivada covariante de T são as derivadas usuais das componentes de T.

5.8 Exemplo. A diferencial covariante do tensor métrico é o tensor identicamente zero. Com efeito, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$\nabla G(X, Y, Z) = Z\langle X, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0,$$

pois ∇ é a conexão Riemanniana.

5.9 Exemplo. Seja $X \in \mathcal{X}(M)$. Identifiquemos X com o tensor que faz corresponder ao campo $Y \in \mathcal{X}(M)$ a função $\langle X, Y\rangle$ (v. Obs. 5.6). A derivada covariante do tensor X em relação ao campo $Z \in \mathcal{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla_Z X(Y) &= \nabla X(Y, Z) = Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y) \\ &= Z\langle X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle.\end{aligned}$$

Decorre daí que o tensor $\nabla_Z X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$. Isto justifica a notação adotada, e mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivada covariante de vetores.

Exercícios

1. Seja G um grupo de Lie com uma métrica $\langle\ ,\ \rangle$ bi-invariante. Seja $X, Y, Z \in \mathcal{X}(G)$ campos unitários e invarianes à esquerda em G.

   a) Mostre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.

   Sugestão: Use a simetria da conexão e o fato que $\nabla_X X = 0$ (Cf. Exercício 3 do Cap. III).

   b) Conclua de (a) que $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$.

   c) Prove que, se X e Y são ortonormais, a curvatura seccional $K(\sigma)$ de G segundo o plano σ gerado por X e Y é dada por

   $$K(\sigma) = \frac{1}{4} || [X, Y] ||^2.$$

   Portanto, *a curvatura seccional $K(\sigma)$ de um grupo de Lie com métrica bi-invariante é não negativa e é zero se e só se σ é gerado por vetores X, Y tais que $[X, Y] = 0$.*

2. Seja X um campo de Killing (v. Exercício 5 do Cap. III) em uma variedade Riemanniana M. Defina uma aplicação $A_X \colon \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ por $A_X(Z) = \nabla_Z X$, $Z \in \mathcal{X}(M)$. Considere a função $f \colon M \to \mathbb{R}$ dada por $f(q) = \langle X, X \rangle_q$, $q \in M$. Seja $p \in M$ um ponto crítico de f (isto é, $df_p = 0$). Prove que, para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$, em p,

   a) $\langle A_X(Z), X \rangle(p) = 0$.

b) $\langle A_X(Z), A_X(Z)\rangle(p) = \frac{1}{2}Z(Z\langle X, X\rangle)(p)$
$+\langle R(X,Z)X, Z\rangle(p)$.

Sugestão para (b): Faça $S = \frac{1}{2}ZZ\langle X, X\rangle - \langle R(X,Z)X, Z\rangle$. Usando a equação de Killing $\langle \nabla_Z X, X\rangle + \langle \nabla_X X, Z\rangle = 0$ (Cf. Exercício 5 do Cap. III), obteremos

$$S = \langle \nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle - \langle \nabla_X \nabla_Z X, Z\rangle.$$

Usando de novo as equações de Killing, obteremos

$$\begin{aligned} S &= -\langle \nabla_Z X, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle. \end{aligned}$$

Como, pela equação de Killing em p, $\nabla_X X(p) = 0$, concluimos o afirmado.

3. Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão par e com curvatura seccional positiva. Prove que todo campo de Killing X em M possui uma singularidade (i.e., existe $p \in M$ tal que $X(p) = 0$).
Sugestão: Seja $f\colon M \to \mathbb{R}$ a função $f(q) = \langle X, X\rangle(q)$, $q \in M$, e seja $p \in M$ um ponto de mínimo de f (Cf. Exercício anterior). Suponha que $X(p) \neq 0$. Defina uma aplicação linear $A\colon T_pM \to T_pM$ por $A(y) = A_X Y(p) = \nabla_Y X(p)$, onde Y é uma extensão de $y \in T_pM$. Seja $E \subset T_pM$ o ortogonal de $X(p)$. Use o exercício anterior para mostrar que $A\colon E \to E$ é um isomorfismo antisimétrico. Isto implica que $\dim E = \dim M - 1$ é par, o que é uma contradição; logo $X(p) = 0$.

4. Seja M uma variedade Riemanniana com a seguinte propriedade: dados dois pontos quaisquer $p, q \in M$, o transporte paralelo de p a q não depende da curva que liga p a q. Prove que a curvatura de M é identicamente nula, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $R(X,Y)Z = 0$.

Sugestão: Considere uma superfície parametrizada $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M$, onde

$$U = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2;\ -\varepsilon < t < 1+\varepsilon,\ -\varepsilon < s < 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$$

e $f(s,0) = f(0,0)$, para todo s. Seja $V_0 \in T_{f(0,0)}(M)$ e defina um campo V ao longo de f por: $V(s,0) = V_0$ e, se $t \neq 0$, $V(s,t)$ é o transporte paralelo de V_0 ao longo da curva $t \to f(s,t)$. Então, pelo Lema 4.1,

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = 0 = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V.$$

Como o transporte paralelo não depende da curva escolhida, $V(s,1)$ é o transporte paralelo de $V(0,1)$ ao longo da curva $s \to f(s,1)$, donde $\frac{D}{\partial s}V(s,1) = 0$. Logo,

$$R_{f(0,1)}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(0,1), \frac{\partial f}{\partial s}(0,1)\right)V(0,1) = 0.$$

Use a arbitrariedade de f e V_0 para concluir o pedido.

5. Seja $\gamma: [0,\ell] \to M$ uma geodésica e $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $X(\gamma(0)) = 0$. Mostre que

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma')(0) = (R(\gamma', X')\gamma')(0),$$

onde $X' = \frac{DX}{dt}$.
Sugestão: Seja R o tensor curvatura do Exemplo 5.2. Observe que, para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$, e $t = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\gamma'}R)(\gamma', X, \gamma', Z) \\ &= \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', X)\gamma', Z\rangle - \langle R(\gamma', X')\gamma', Z\rangle - \langle R(\gamma', X)\gamma', Z'\rangle \\ &= \langle \nabla_{\gamma'}(R(\gamma', X)\gamma'), Z\rangle - \langle R(\gamma', X')\gamma', Z\rangle. \end{aligned}$$

6. (*Espaços localmente simétricos*). Seja M uma variedade Riemanniana. M é um espaço *localmente simétrico* se $\nabla R = 0$, onde R é o tensor curvatura de M. (O significado geométrico desta condição será dado no Exercício 14 do Cap. VIII).

a) Seja M um espaço localmente simétrico e seja também $c\colon [0,\ell) \to M$ uma curva de M. Sejam X, Y, Z campos de vetores paralelos ao longo de γ. Prove que $R(X,Y)Z$ é um campo paralelo ao longo de c.

b) Prove que se M é localmente simétrico, conexo, e tem dimensão dois, então M tem curvatura seccional constante.

c) Prove que se M tem curvatura (seccional) constante, então M é um espaço localmente simétrico.

7. Prove a 2ª *Identidade de Bianchi*:

$$\nabla R(X,Y,Z,W,T) + \nabla R(X,Y,W,T,Z) + \nabla R(X,Y,T,Z,W) = 0$$

para todo $X,Y,Z,W,T \in \mathcal{X}(M)$.
Sugestão: Como as entidades envolvidas são tensores, basta demonstrar a igualdade em um ponto $p \in M$. Escolha um referencial geodésico $\{e_i\}$ em torno de p (v. Exercício 7 do Cap. III). Neste referencial $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, donde

$$\nabla R(e_i,e_j,e_k,e_\ell,e_k) = e_h\langle R(e_i,e_j)e_k,e_\ell\rangle = e_h\langle R(e_k,e_\ell)e_i,e_j\rangle$$
$$\langle \nabla_{e_h}\nabla_{e_\ell}\nabla_{e_k}e_i - \nabla_{e_h}\nabla e_k\nabla_{e_\ell}e_i + \nabla_{e_h}\nabla_{[e_k,e_\ell]}e_i, e_j\rangle.$$

Portanto, usando a identidade de Jacobi para o colchete,

$$\nabla R(e_i,e_j,e_k,e_\ell,e_h) + \nabla R(e_i,e_j,e_\ell,e_h,e_k) + \nabla R(e_i,e_j,e_h,e_k,e_\ell) = R(e_\ell,e_h,\nabla_{e_k}e_i,e_j) + R(e_h,e_k,\nabla_{e_\ell}e_i,e_j) + R(e_k,e_\ell,\nabla_{e_h}e_i,e_j) = 0,$$

uma vez que cada uma das parcelas se anula em p. O caso geral segue por linearidade.

8. (*O Teorema de Schur*). Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa com $n \geq 3$. Suponha que M é *isotrópica*, isto é, para cada $p \in M$, a curvatura seccional $K(p,\sigma)$ não depende de $\sigma \subset T_pM$. Prove que M tem curvatura seccional

constante, isto é, $K(p,\sigma)$ também não depende de p.
Sugestão: Defina um tensor R' de ordem 4 por

$$R'(W,Z,X,Y) = \langle W,X\rangle\langle Z,Y\rangle - \langle Z,X\rangle\langle W,Y\rangle.$$

Se $K(p,\sigma) = K$ não depende de σ, pelo Lema 3.4, $R = KR'$. Portanto, para todo $U \in \mathcal{X}(M)$, $\nabla_U R = (UK)R'$. Utilizando a 2ª identidade de Bianchi (v. Exercício 7):

$$\nabla R(W,Z,X,Y,U) + \nabla R(W,Z,Y,U,X) + \nabla R(W,Z,U,X,Y) = 0,$$

obteremos, para todo $X,Y,W,Z,U \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} 0 = {} & (UK)(\langle W,X\rangle\langle Z,Y\rangle - \langle Z,X\rangle\langle W,Y\rangle) \\ & + (XK)(\langle W,Y\rangle\langle Z,U\rangle - \langle Z,Y\rangle\langle W,U\rangle) \\ & + (YK)(\langle W,U\rangle\langle Z,X\rangle - \langle Z,U\rangle\langle W,X\rangle). \end{aligned}$$

Fixe $p \in M$. Como $n \geq 3$, é possível, fixado X em p, escolher Y e Z em p tais que $\langle X,Y\rangle = \langle Y,Z\rangle = \langle Z,X\rangle = 0$, $\langle Z,Z\rangle = 1$. Faça $U = Z$ em p. A relação acima fornece, para todo W,

$$\langle (XK)Y - (YK)X, W\rangle = 0.$$

Como X e Y são linearmente independentes de p, concluimos que $XK = 0$ para todo $X \in T_pM$. Logo $K = \text{const.}$

9. Prove que a curvatura escalar $K(p)$ em $p \in M$ é dada por

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(x)\, dS^{n-1},$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária S^{n-1} de T_pM.
Sugestão: Use o seguinte argumento geral sobre formas quadráticas. Considere uma base ortonormal $e_1,\ldots,e_n$ em T_pM tal que se $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\text{Ric}_p(x) = \sum \lambda_i x_i^2, \quad \lambda_i \quad \text{real.}$$

Como $|x| = 1$, o vetor $(x_1, \ldots, x_n) = \nu$ é um vetor normal unitário em S^{n-1}. Indicando por $V = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$, e usando o teorema de Stokes, obteremos

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \left(\sum \lambda_i x_i^2\right) dS^{n-1} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle V, \nu \rangle dS^{n-1}$$
$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \operatorname{div} V \, dB^n,$$

onde B^n é a bola unitária limitada por $S^{n-1} = \partial B^n$. Notando que $\operatorname{vol} B^n / \omega_{n-1} = 1/n$, concluimos que

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \operatorname{Ric}_p(x) dS^{n-1} = \frac{1}{n} \operatorname{div} V = \frac{\sum \lambda_i}{n}$$
$$= \frac{\sum \operatorname{Ric}_p(e_i)}{n} = K(p).$$

10. (Variedades de Einstein). Uma variedade Riemanniana M^n é chamada uma *variedade de Einstein* se, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\operatorname{Ric}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle$, onde $\lambda \colon M \to \mathbb{R}$ é uma função real. Prove que:

    a) Se M^n é conexa e de Einstein, com $n \geq 3$, então λ é constante em M.

    b) Se M^3 é uma variedade de Einstein conexa, então M^3 tem curvatura seccional constante.

    Sugestão para (a): Considere um referencial $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n \geq 3$, ortonormal e geodésico em um ponto $p \in M$ (v. Exercício 7 do Cap. IV). A 2ª identidade de Bianchi (v. Exercício 7) em p se escreve

    $$(*) \qquad e_s(R_{hijk}) + e_j(R_{hiks}) + e_k(R_{hisj}) = 0$$

    onde R_{hijk} são as componentes do tensor curvatura neste referencial, e levou-se em conta que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Observe

que $\langle e_i, e_k \rangle = g_{ik} = \delta_{ik} = \delta^{ik}$. Multiplicando (*) por $\delta_{ik}\delta_{hj}$ e somando em i, k, h, j, obteremos: para a primeira parcela,

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_s(R_{hijk}) = e_s\Big(\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} R_{hijk}\Big)$$
$$= e_s\Big(\sum_{hj} \delta_{hj} R_{hj}\Big) = e_s\Big(\sum_{hj} \delta_{hj}(\lambda \delta_{hj})\Big) = n e_s(\lambda);$$

para a segunda parcela,

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_j(R_{hiks}) = -\sum_{jh} \delta_{hj} e_j\Big(\sum_{ik} \delta_{ik} R_{hisk}\Big)$$
$$= \sum_{jh} \delta_{hj} e_j(\lambda \delta_{hs}) = -e_s(\lambda);$$

e para a terceira parcela,

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_k(R_{hisj}) = -e_s(\lambda).$$

Portanto, (*) implica que, para todo s, $(n-2)e_s(\lambda) = 0$. Pela arbitrariedade de p, λ é constante em M.

Capítulo V

Campos de Jacobi

1 Introdução

Neste capítulo obteremos uma primeira relação entre os dois conceitos fundamentais introduzidos anteriormente, a saber, geodésicas e curvatura. Conforme veremos (Cf. Obs. 2.11), a curvatura $K(p, \sigma)$, $\sigma \subset T_pM$, indica quão rapidamente "se afastam"as geodésicas que saem de p e são tangentes a σ. Para formalizar de maneira precisa esta velocidade de afastamento das geodésicas, necessitamos introduzir os chamados campos de Jacobi. Campos de Jacobi são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidos por meio de uma equação diferencial que aparece naturalmente no estudo da aplicação exponencial (Cf. Sec. 2). Além de fornecer a relação acima mencionada, os campos de Jacobi permitem obter uma caracterização simples das singularidades da aplicação exponencial (Cf. Prop. 3.5).

2 A equação de Jacobi

Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Na demonstração do Lema de Gauss vimos que se $\exp_p$ está definida em

$v \in T_pM$, e escolhemos $w \in T_v(T_pM)$, então

$$(d\exp_p)_v w = \frac{\partial f}{\partial s}(1,0),$$

onde f é uma superfície parametrizada dada por

$$f(t,s) = \exp_p tv(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon,$$

e $v(s)$ é uma curva de T_pM com $v(0) = v$, $v'(0) = w$.

Gostaríamos de obter informações sobre $||(d\exp_p)_v(w)||$. Uma das razões para isto é que $||(d\exp_p)_v(w)||$ indica intuitivamente a velocidade de afastamento das geodésicas $t \to \exp_p tv(s)$ que saem de p. Como veremos adiante, um tal afastamento está associado com o valor da curvatura seccional em p segundo o plano gerado por v e w. Outra razão, é que se tivermos $||(d\exp_p)_v(w)|| = 0$ com $w \neq 0$, então v será um ponto crítico de $\exp_p$.

Convém estender ligeiramente o nosso objetivo e estudar o campo

$$(d\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$$

ao longo da geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq 1$.

A primeira observação é que $\frac{\partial f}{\partial s}$ satisfaz uma equação diferencial. Com efeito, como γ é uma geodésica, temos para todo (t,s), $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Logo, pelo Lema 4.1 do Cap. IV,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} - R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = J(t)$, obteremos que J satisfaz a equação

$$\frac{D^2J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \tag{1}$$

A equação acima é chamada *equação de Jacobi*. Como ela aparece em várias situações, convém fazer dela um estudo separado. Iniciaremos com uma definição.

2.1 Definição. Seja $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica de M. Um campo de vetores J ao longo de γ é um *campo de Jacobi* se satisfaz a equação de Jacobi (1), para $t \in [0,a]$.

Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$. Com efeito, sejam $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ campos paralelos e ortonormais ao longo de γ. Escrevamos:

$$J(t) = \sum_i f_i(t) e_i(t), \;\; a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t)\rangle,$$

$$i, j = 1, \ldots, n = \dim M.$$

Então

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t) e_i(t),$$

e

$$\begin{aligned} R(\gamma', J)\gamma' &= \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', e_j\rangle e_j \\ &= \sum_{ij} f_i \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j\rangle e_j = \sum_{ij} f_i\, a_{ij} e_j\,. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (1) equivale ao sistema

$$f_j''(t) + \sum_i a_{ij}(t) f_i(t) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

que é um sistema linear de segunda ordem. Assim, dadas as condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$, existe uma solução C^∞ do sistema, definida em $[0,a]$. Existem, portanto, $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes ao longo de γ.

2.2 Observação. Convém notar $\gamma'(t)$ e $t\gamma'(t)$ são campos de Jacobi ao longo de γ. O primeiro tem derivada zero e nunca se anula; o segundo é nulo se e só se $t = 0$. Devido a esses fatos, só consideraremos campos de Jacobi ao longo de γ que são normais a γ'.

2.3 Exemplo. (*Campos de Jacobi em variedades de curvatura constante*). Seja M uma variedade Riemanniana de curvatura

seccional constante K, seja $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ uma geodésica normalizada em M e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'. Afirmamos que do fato de ser $|\gamma'| = 1$ e do Lema 3.4 do Capítulo IV, segue que

$$R(\gamma', J)\gamma' = KJ.$$

Com efeito, para todo campo de vetores T ao longo de γ tem-se

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T\rangle = K\{(\gamma', \gamma')\langle J, T\rangle - \langle \gamma', T\rangle\langle J, \gamma'\rangle\} = K\langle J, T\rangle,$$

donde o afirmado.

Portanto a equação de Jacobi se escreve

$$\frac{D^2J}{dt^2} + KJ = 0. \tag{2}$$

Seja $w(t)$ um campo paralelo ao longo de γ com $\langle \gamma'(t), w(t)\rangle = 0$ e $|w(t)| = 1$. Verifica-se facilmente que

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}\, w(t), & \text{se} \quad K > 0, \\ tw(t), & \text{se} \quad K = 0, \\ \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}\, w(t), & \text{se} \quad K < 0, \end{cases}$$

é a solução de (2) com as condições iniciais $J(0) = 0$, $J'(0) = w(0)$.

Como vimos anteriormente, dados $p \in M$, $v \in T_pM$ e $w \in T_v(T_pM)$, podemos construir um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma\colon [0,1] \to M$, dada por $\gamma(t) = \exp_p tv$. Para isto consideramos a superfície parametrizada dada por $f(t,s) = \exp_p tv(s)$, onde $v(s)$ é uma curva em T_pM com $v(0) = v$, $v'(0) = w$, e fazemos $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$. Observe que $J(0) = 0$.

Vamos mostrar que esta é essencialmente a única maneira de construir campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J(0) = 0$. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

2.4 Proposição. *Seja $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica normalizada e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$. Faça $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ e $\gamma'(0) = v$. Considere w como um elemento de $T_{av}(T_{\gamma(0)}M)$ e construa uma curva $v(s)$ em $T_{\gamma(0)}M$ com $v(0) = av$, $v'(0) = w$. Faça $f(t,s) = \exp_p tv(s)$, $p = \gamma(0)$, e defina um campo de Jacobi $\overline{J}$ por $\overline{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$. Então $\overline{J} = J$ em $[0,a]$.*

Demonstração: Para $s = 0$, teremos

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial t}((d\exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t}(t(d\exp_p)_{tv}(w))$$
$$= (d\exp_p)_{tv}(w) + t\frac{D}{\partial t}((d\exp_p)_{tv}(w)).$$

Portanto, para $t = 0$,

$$\frac{D\overline{J}}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = (d\exp_p)_0(w) = w.$$

Como $J(0) = \overline{J}(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\overline{J}}{dt}(0) = w$, concluimos, pelo teorema de unicidade, que $J = \overline{J}$. □

2.5 Corolário. *Seja $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0,a].$$

2.6 Observação. É possível obter uma construção análoga à da Proposição 2.4 para campos de Jacobi que não satisfazem a condição $J(0) = 0$. Como não utilizaremos este fato, deixaremos a sua demonstração como um exercício (Exercício 2).

Vamos agora relacionar a velocidade de afastamento das geodésicas que saem de $p \in M$ com a curvatura em p. De agora por diante, por simplicidade de notação, indicaremos $\frac{DJ}{dt} = J'$, $\frac{D^2J}{dt^2} = J''$, etc.

2.7 Proposição. *Seja $p \in M$ e $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Seja $w \in T_v(T_pM)$ com $|w| = 1$ e seja J o campo de Jacobi ao longo de γ dado por*

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw), \quad 0 \le t \le a.$$

Então o desenvolvimento de Taylor de $||J(t)||^2$ *em torno de* $t = 0$ *é dado por*

$$||J(t)||^2 = t^2 - \frac{1}{3}\langle R(v,w)v,w\rangle t^4 + R(t), \tag{3}$$

onde $\lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^4} = 0$.

Demonstração: Como $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$, teremos, para os três primeiros coeficientes:

$$\begin{aligned}
&\langle J, J\rangle(0) = 0,\\
&\langle J, J\rangle'(0) = 2\langle J, J'\rangle(0) = 0,\\
&\langle J, J\rangle''(0) = 2\langle J', J'\rangle(0) + 2\langle J'', J\rangle(0) = 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $J''(0) = -R(\gamma', J)\gamma'(0) = 0$, teremos

$$\langle J, J\rangle'''(0) = 6\langle J', J''\rangle(0) + 2\langle J''', J\rangle(0) = 0.$$

Precisamos agora do seguinte fato:

$$\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0). \tag{4}$$

Para provar (4), note que para todo W, e em $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{dt}(R(\gamma', J)\gamma'), W \right\rangle &= \frac{d}{dt}\langle R(\gamma', W)\gamma', J\rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', W'\rangle\\
&= \left\langle \frac{D}{dt}(R(\gamma', W)\gamma'), J \right\rangle + \langle R(\gamma', W)\gamma', J'\rangle\\
&= \langle R(\gamma', J')\gamma', W\rangle
\end{aligned}$$

o que prova (4).

Decorre de (4) e da equação de Jacobi que $J'''(0) = -R(\gamma', J')\gamma'(0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle J, J\rangle''''(0) &= 8\langle J', J'''\rangle(0) + 6\langle J'', J''\rangle(0) + 2\langle J'''', J\rangle(0)\\
&= -8\langle J', R(\gamma', J')\gamma'\rangle(0) = -8\langle R(v,w)v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Juntando os valores acima, obteremos (3). □

2.8 Observação. A expressão (4) pode também ser obtida utilizando a derivação de tensores descrita na Secção 5 do Cap. IV (v. Exercício 5 do Cap. IV).

2.9 Corolário. *Se* $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ *está parametrizada pelo comprimento de arco, (i.e.,* $|v| = 1$*)* $|w| = 1$ *e* $\langle w, v\rangle = 0$*, a expressão* $\langle R(v,w)v, w\rangle$ *é a curvatura seccional em* p *segundo o plano gerado por* v *e* w*. Portanto, neste caso,*

$$||J(t)||^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p,\sigma)t^4 + R(t). \tag{5}$$

2.10 Corolário. *Nas mesmas condições do corolário anterior,*

$$||J(t)|| = t - \frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3 + \widetilde{R}(t), \quad \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{R}(t)}{t^3} = 0. \tag{6}$$

2.11 Observação. A expressão (6) contém essencialmente a relação entre geodésicas e curvatura, mencionado no início deste capítulo. Com efeito, considerando a superfície parametrizada

$$f(t,s) = \exp_p tv(s), \quad t \in [0,\delta], \quad s \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$

onde δ é suficientemente pequeno para que $\exp_p tv(s)$ esteja definida, e $v(s)$ é uma curva de T_pM com $||v(s)|| = 1$, $v(0) = v$, $v'(0) = w$, vê-se que os raios $t \to tv(s)$, $t \in [0,\delta]$, que saem da origem 0 de T_pM se afastam do raio $t \to tv(0)$ com uma velocidade

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial s}tv(s)\right)(0)\right\| = ||tw|| = t.$$

Por outro lado, (6) nos diz que as geodésicas $t \to \exp_p(tv(s))$ se afastam da geodésica $\gamma(t) = \exp_p tv(0)$ com uma velocidade que difere de t por um termo de terceira ordem em t, dado por $-\frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3$. Isto quer dizer que, localmente, as geodésicas se afastam menos que os raios de T_pM, se $K_p(\sigma) > 0$, e se afastam mais que os raios de T_pM, se $K_p(\sigma) < 0$. Em verdade, para t pequeno, o valor de $K(p,\sigma)t^3$ fornece uma aproximação para a medida deste afastamento com um erro de ordem t^3.

3 Pontos conjugados

Passaremos agora a relacionar as singularidades da aplicação exponencial com os campos de Jacobi. Antes precisamos de algumas definições.

3.1 Definição. Seja $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é *conjugado* de $\gamma(0)$ ao longo de γ, $t_0 \in (0,a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ, não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$. O número máximo de tais campos linearmente independentes é a *multiplicidade* do ponto conjugado $\gamma(t_0)$.

Observe que se $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$, então $\gamma(0)$ é conjugado de $\gamma(t_0)$.

3.2 Observação. Se a dimensão de M é n, existem exatamente n campos de Jacobi linearmente independentes ao longo de uma geodésica $\gamma\colon [0,a] \to M$, que se anulam em $\gamma(0)$. Isto decorre do fato, facilmente verificado, que os campos de Jacobi $J_1, \ldots, J_k$ com $J_i(0) = 0$ são linearmente independentes se e só se $J_1'(0), \ldots, J_k'(0)$ são linearmente independentes. Além disto, o campo de Jacobi $J(t) = t\gamma'(t)$ nunca se anula para $t \neq 0$ (v. Obs. 2.2). Decorre daí que a multiplicidade de um ponto conjugado nunca excede $n-1$.

3.3 Exemplo. Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\}$. Neste exemplo, admitiremos um fato a ser demonstrado no próximo capítulo, a saber, que as curvaturas seccionais de S^n são iguais a um. O campo de Jacobi em S^n dado no Exemplo 2.3, isto é, $J(t) = (\operatorname{sen} t)w(t)$, satisfaz a condição $J(0) = J(\pi) = 0$. Portanto, ao longo de qualquer geodésica γ de S^n, o ponto antípoda $\gamma(\pi)$ de $\gamma(0)$ é conjugado de $\gamma(0)$. É imediato verificar que existem $n-1$ tais campos que são linearmente independentes, isto é, a multiplicidade de $\gamma(\pi)$ como ponto conjugado de $\gamma(0)$ é $n-1$.

3.4 Definição. O conjunto dos (primeiros) pontos conjugados a um ponto $p \in M$, para todas as geodésicas que saem de p, é chamado o *lugar dos pontos conjugados* de p e indicado por $C(p)$.

Em S^n, $C(p) = \{-p\}$, para todo p. O caso de S^n não é, entretanto, típico. Um exemplo mais típico é dado pela elipsóide, onde $C(p)$ é, em geral, uma curva com quatro pontos singulares (v. Fig. 4 do Cap. XIII); Cf. Braunmühl, A., "Geodätische Linien auf dreiachsigen Flächen 2-Grades", Math. Ann., 20 (1882), 557-586.

A proposição seguinte relaciona pontos conjugados com as singularidades da aplicação exponencial.

3.5 Proposição. *Seja* $\gamma\colon [0,a] \to M$ *uma geodésica e faça* $\gamma(0) = p$. *O ponto* $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0,a]$, *é conjugado de* p *ao longo de* γ *se e somente se* $v_0 = t_0\gamma'(0)$ *é um ponto crítico de* $\exp_p$. *Além disto, a multiplicidade de* q *como ponto conjugado de* p *é igual a dimensão do núcleo da aplicação linear* $(d\exp_p)_{v_0}$.

Demonstração: O ponto $q = \gamma(t_0)$ é ponto conjugado de p ao longo de γ se e somente se existe um campo de Jacobi não nulo J ao longo de γ com $J(0) = J(t_0) = 0$. Sejam $v = \gamma'(0)$ e $w = J'(0)$. Pelo Corolário 2.5, $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$, $t \in (0,a]$. Observe que J é não nulo se e só se $w \neq 0$. Portanto $q = \gamma(t_0)$ é conjugado de p se e só se

$$0 = J(t_0) = (d\exp_p)_{t_0v}(t_0w), \quad w \neq 0,$$

isto é, se e somente se t_0v é um ponto crítico de $\exp_p$. A primeira afirmação está portanto provada.

A multiplicidade de q é igual ao número de campos de Jacobi $J_1, \ldots, J_k$ linearmente independentes que se anulam em 0 em t_0. Como é imediato verificar, os campos $J_1, \ldots, J_k$ são linearmente independentes se e só se $J_1'(0), \ldots, J_k'(0)$ são linearmente independentes em T_pM. Pela construção acima, a multiplicidade de q é igual à dimensão do núcleo de $(d\exp_p)_{t_0v}$. □

Concluiremos este capítulo apresentando algumas propriedades dos campos de Jacobi que serão úteis posteriormente.

3.6 Proposição. *Seja* J *um campo de Jacobi ao longo da geodésica* $\gamma\colon [0,a] \to M$. *Então*

$$\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle, \quad t \in [0,a].$$

Demonstração: Omitindo o t por conveniência de notação, teremos pela equação de Jacobi,

$$\langle J', \gamma' \rangle' = \langle J'', \gamma' \rangle = -\langle R(\gamma', J)\gamma', \gamma' \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle J', \gamma' \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle$. Além disto,

$$\langle J, \gamma' \rangle' = \langle J', \gamma' \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle.$$

Integrando esta última equação em t, obtemos finalmente

$$\langle J, \gamma' \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle. \qquad \square$$

3.7 Corolário. *Se* $\langle J, \gamma' \rangle(t_1) = \langle J, \gamma' \rangle(t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, a]$, $t_1 \neq t_2$, *então* $\langle J, \gamma' \rangle$ *não depende de* t; *em particular, se* $J(0) = J(a) = 0$, *então* $\langle J, \gamma' \rangle(t) \equiv 0$.

3.8 Corolário. *Suponha que* $J(0) = 0$. *Então* $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ *se e somente se* $\langle J, \gamma' \rangle(t) \equiv 0$; *em particular, o espaço dos campos de Jacobi* J *com* $J(0) = 0$ *e* $\langle J, \gamma' \rangle(t) \equiv 0$ *tem dimensão igual a* $n - 1$.

3.9 Proposição. *Seja* $\gamma\colon [0, a] \to M$ *uma geodésica. Sejam* $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$ *e* $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$. *Se* $\gamma(a)$ *não é conjugado a* $\gamma(0)$ *existe um único campo de Jacobi* J *ao longo de* γ, *com* $J(0) = V_1$ *e* $J(a) = V_2$.

Demonstração: Seja $\mathcal{J}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$, $J \in \mathcal{J}$. Defina uma aplicação $\Theta\colon \mathcal{J} \to T_{\gamma(a)}M$ por

$$\Theta(J) = J(a), \quad J \in \mathcal{J}.$$

Como $\gamma(a)$ não é conjugado a $\gamma(0)$, Θ é injetiva. Com efeito, se tivermos $J_1 \neq J_2$ com $J_1(a) = J_2(a)$, teremos que $J_1 - J_2$ é um campo de Jacobi não nulo com $(J_1 - J_2)(0) = 0$, $(J_1 - J_2)(a) = 0$, o que contradiz o fato de $\gamma(a)$ não ser conjugado a $\gamma(0)$.

Como Θ é linear, decorre de sua injetividade e do fato de ser $\dim \mathcal{J} = \dim T_{\gamma(a)}M$ que Θ é um isomorfismo. Logo existe $\overline{J}_1 \in \mathcal{J}$ com $\overline{J}_1(0) = 0$ e $\overline{J}_1(a) = V_2$.

Por um argumento análogo, existe um campo de Jacobi $\overline{J}_2$ ao longo de γ com $\overline{J}_2(a) = 0$, $\overline{J}_2(0) = V_1$. O campo procurado é dado por $J = \overline{J}_1 + \overline{J}_2$. A unicidade é imediata. □

3.10 Corolário. *Seja* $\gamma\colon [0,a] \to M$ *uma geodésica em* M, $\dim M = n$, *e seja* $\mathcal{J}^\perp$ *o espaço dos campos de Jacobi com* $J(0) = 0$, $J'(0) \perp \gamma'(0)$. *Seja* $\{J_1, \ldots, J_{n-1}\}$ *uma base de* $\mathcal{J}^\perp$. *Se* $\gamma(t)$, $t \in (0,a]$, *não é conjugado de* $\gamma(0)$, *então* $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ *é uma base do complemento ortogonal* $\{\gamma'(t)\}^\perp \subset T_{\gamma(t)}M$ *de* $\gamma'(t)$.

Exercícios

1. Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional identicamente nula. Mostre que, para cada $p \in M$, a aplicação $\exp_p\colon B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to B_\varepsilon(p)$ é uma isometria, onde $B_\varepsilon(p)$ é uma bola normal em p.

2. Seja M uma variedade Riemanniana, $\gamma\colon [0,1] \to M$ uma geodésica, e J um campo de Jacobi ao longo de γ. Prove que existe uma superfície parametrizada $f(t,s)$, onde $f(t,0) = \gamma(t)$ e as curvas $t \to f(t,s)$ são geodésicas, tal que $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$.
   Sugestão: Escolha uma curva $\lambda(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ em M tal que $\lambda(0) = \gamma(0)$, $\lambda'(0) = J(0)$. Ao longo de λ escolha um campo de vetores $W(s)$ com $W(0) = \gamma'(0)$, $\frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$. Defina $f(s,t) = \exp_{\lambda(s)} tW(s)$ e verifique que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{d\lambda}{ds}(0) = J(0)$ e

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0).$$

3. Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-positiva. Prove que, para todo p, o lugar dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.
   Sugestão: Admita a existência de um campo de Jacobi não-trivial ao longo de uma geodésica $\gamma\colon [0,a] \to M$, com

$\gamma(0) = p$, $J(0) = J(a) = 0$. Use a equação de Jacobi para mostrar que $\frac{d}{dt}\left(\frac{DJ}{dt}, J\right) \geq 0$. Conclua que $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle \equiv 0$. Como $\frac{d}{dt}\langle J, J\rangle = 2\left\langle \frac{DJ}{dt}, J\right\rangle \equiv 0$, temos $||J||^2 = \text{const.} = 0$. Contradição.

4. Seja $b < 0$ e seja M uma variedade de curvatura seccional negativa constante igual a b. Seja $\gamma\colon [0, \ell] \to M$ uma geodésica normalizada, e seja $v \in T_{\gamma(\ell)}M$ tal que $\langle v, \gamma'(\ell)\rangle = 0$ e $|v| = 1$. Como M tem curvatura negativa, $\gamma(\ell)$ não é conjugado com $\gamma(0)$ (v. Exercício 3). Mostre que o campo de Jacobi J ao longo de γ determinado por $J(0) = 0$, $J(\ell) = v$ é dado por

$$J(t) = \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-b})}{\operatorname{senh}(\ell\sqrt{-b})}\, w(t),$$

onde $w(t)$ é o transporte paralelo ao longo de γ do vetor

$$w(0) = \frac{u_0}{|u_0|}, \quad u_0 = (d\exp_p)^{-1}_{\ell\gamma'(0)}(v)$$

e onde u_0 é considerado como um vetor de $T_{\gamma(0)}M$ pela identificação $T_{\gamma(0)} \approx T_{\ell\gamma'(0)}(T_{\gamma(0)}M)$.
Sugestão: Pelo Exemplo 2.3, o campo de Jacobi J_1 ao longo de γ dado por $J_1(0) = 0$, $J_1'(0) = \frac{u_0}{|u_0|}$, é dado por

$$J_1(t) = \frac{\operatorname{senh} t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}\, w(t).$$

Além disso, pelo Corolário 2.5,

$$J_1(\ell) = (d\exp_p)_{\ell\gamma'(0)}(\ell w(0)).$$

Decorre daí que

$$J(\ell) = v = (d\exp_p)_{\ell\gamma'(0)}(u_0) = J_1(\ell)\frac{|u_0|}{\ell}.$$

Portanto,

$$J(t) = J_1(t)\frac{|u_0|}{\ell} = \frac{\operatorname{senh} t\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}\, w(t)\frac{|u_0|}{\ell}.$$

Além disso, como

$$1 = |v| = |J(\ell)| = \frac{\operatorname{senh} \ell\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}} \frac{|u_0|}{\ell},$$

tem-se que $\frac{|u_0|}{\ell} = \left(\frac{\operatorname{senh} \ell\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}\right)^{-1}$, donde o afirmado.

5. *Campos de Jacobi* e *pontos conjugados em espaços localmente simétricos* (Cf. Exercício 6 do Cap. IV).
Seja $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ uma geodésica em um espaço localmente simétrico M e seja $v = \gamma'(0)$ sua velocidade em $p = \gamma(0)$. Defina uma transformação linear $K_v\colon T_pM \to T_pM$ por

$$K_v(x) = R(v,x)v, \quad x \in T_pM.$$

a) Prove que K_v é auto-adjunta.

b) Escolha uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em T_pM que diagonaliza K_v, isto é,

$$K_v(e_i) = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Extenda os e_i a campos ao longo de γ por transporte paralelo. Mostre que, para todo t,

$$K_{\gamma'(t)}(e_i(t)) = \lambda_i e_i(t),$$

onde λ_i não depende de t.

Sugestão: Use o Exercício 6(a), do Cap. IV.

c) Seja $J(t) = \sum_i x_i(t)e_i(t)$ um campo de Jacobi ao longo de γ. Mostre que a equação de Jacobi é equivalente ao sistema

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \lambda_i x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

d) Mostre que os pontos conjugados de p ao longo de γ são dados por $\gamma(\pi k/\sqrt{\lambda_i})$, onde k é um inteiro positivo e λ_i é um valor próprio positivo de K_v.

6. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão dois (neste caso diremos que M é uma superfície). Seja $B_\delta(p)$ uma bola normal em um ponto $p \in M$ e considere a superfície parametrizada

$$f(\rho, \theta) = \exp_p \rho v(\theta), \quad 0 < \rho < \delta, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

onde $v(\theta)$ é um círculo de raio um em T_pM parametrizado pelo ângulo central θ.

a) Mostre que (ρ, θ) são coordenadas em um aberto $U \subset M$ formado pela bola aberta $B_\rho(p)$ menos o raio $\exp_p(-\rho v(0))$, $0 < \rho < \delta$. Tais coordenadas são chamadas *coordenadas polares* em p.

b) Mostre que os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana nestas coordenadas são:

$$g_{12} = 0, \quad g_{11} = \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right|^2 = |v(\theta)|^2 = 1, \quad g_{22} = \left|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|^2.$$

c) Mostre que, ao longo da geodésica $f(\rho, 0)$, tem-se

$$(\sqrt{g_{22}})_{\rho\rho} = -K(p)\rho + R(\rho), \quad \text{onde} \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{R(\rho)}{\rho} = 0$$

e $K(p)$ é a curvatura seccional de M em p.

d) Prove que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{(\sqrt{g_{22}})_{\rho\rho}}{\sqrt{g_{22}}} = -K(p).$$

Esta última expressão é o valor da curvatura Gaussiana de M em p dadas em coordenadas polares (Cf., por exemplo, M. do Carmo [dC 2] pg.288). Admitindo este fato da teoria das superfícies (d) mostra que, em dimensão dois, a curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana. No próximo capítulo, daremos uma demonstração mais direta deste fato.

7. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão dois. Seja $p \in M$ e seja $V \subset T_pM$ uma vizinhança da origem onde $\exp_p$ é um difeomorfismo. Seja $S_r(0) \subset V$ um círculo de raio r centrado na origem, e seja L_r o comprimento da curva $\exp_p(S_r)$ em M. Prove que a curvatura seccional em $p \in M$ é dada por

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L_r}{r^3}.$$

Sugestão: Use o Exercício 6.

8. Seja $\gamma\colon [0, a] \to M$ uma geodésica e X um campo de Killing em M.

   a) Mostre que a restrição $X(\gamma(s))$ de X a $\gamma(s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ.

   b) Use o item (a) para mostrar que (cf. Exercício 6 do Cap. III) se M é conexa e existe $p \in M$ com $X(p) = 0$ e $\nabla_Y X(p) = 0$, para todo $Y(p) \in T_pM$, então $X = 0$ em M.

Capítulo VI

Imersões Isométricas

1 Introdução

Neste capítulo consideraremos a seguinte situação. Seja $f\colon M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão igual a $k = n+m$. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$. Gostaríamos de estudar as relações entre as geometrias de M e de $\overline{M}$.

Como sempre, a motivação para este estudo proveio do caso clássico de superfícies S em $\mathbb{R}^3$. Para efeito de motivação, podemos nos restringir ao caso em que S é um gráfico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}$ de uma função diferenciável f com $f(0, 0) = 0$ e $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ (esta última condição quer dizer que S é tangente ao plano $x0y$). Neste caso, sabemos do Cálculo, que a forma de S em uma vizinhança da origem $0 \in \mathbb{R}^3$ é profundamente influenciada pela forma quadrática

$$II(x, y) = f_{xx}(0)x^2 + 2f_{xy}(0)xy + f_{yy}(0)y^2$$

definida no plano $x0y$. II é chamada a segunda forma fundamental de S no ponto 0 e, por exemplo, a curvatura Gaussiana

de S em 0 é dada por

$$K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 . \tag{1}$$

O nosso primeiro objetivo é generalizar a noção da segunda forma fundamental para o caso $f\colon M \to \overline{M}$. Como a codimensão m pode ser maior do que 1, a forma quadrática assim definida passa a tomar valores em um espaço vetorial de dimensão $m \geq 1$.

Como veremos, as relações entre as métricas Riemannianas de M e $\overline{M}$ se exprimem por meio da segunda forma fundamental. Entre estas relações, a mais importante é provavelmente a fórmula de Gauss (v. Teorema 2.5) que generaliza (1) e exprime a diferença entre as curvaturas de M e $\overline{M}$ por meio de expressões construídas a partir da segunda forma fundamental. Como as curvaturas são definidas intrinsecamente, a fórmula de Gauss generaliza o teorema fundamental de Gauss, mencionado na Introdução do Capítulo I, que foi o ponto de partida da Geometria Riemanniana.

Utilizando a fórmula de Gauss, daremos uma interpretação geométrica da curvatura seccional que é essencialmente a definição de curvatura utilizada por Riemann (cf. Cap. IV, Introdução).

Na última Seção, introduziremos as equações de Codazzi e de Ricci, que, junto com a equação de Gauss constituem as equações fundamentais da teoria local das imersões isométricas.

2 A segunda forma fundamental

Seja $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi\colon \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ (v. Fig. 1). Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tais

identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

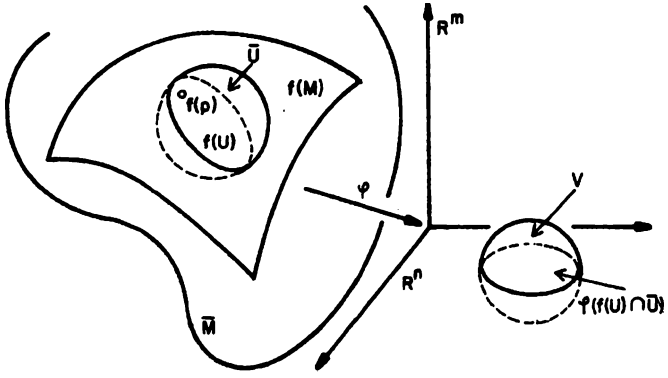


Figura 1

Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões

locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Verifica-se facilmente que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M (cf. Exercíco 3 do Cap. II).

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f\colon M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$. Com efeito, se $\overline{X}_1$ é uma outra extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y},$$

que se anula em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M; além disto, se $\overline{Y}_1$ é uma outra extensão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X.

Portanto $B(X,Y)$ está bem definida. No que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

2.1 Proposição. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B\colon \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração: Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX,Y) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Resta mostrar que

$B(X, fY) = fB(X,Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por $\bar{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$, teremos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\bar{f}\,\overline{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \bar{f}\,\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y + \overline{X}(\bar{f})\overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em M, $f = \bar{f}$ e $\overline{X}(\bar{f}) = X(f)$, concluimos que as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X,Y)$, isto é, B é bilinear.

Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Como em M, $[\overline{X}, \overline{Y}]$=$[X,Y]$, concluimos que $B(X,Y)$=$B(Y,X)$. □

Como B é bilinear, concluimos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é, pela Proposição 2.1, uma forma bilinear simétrica.

2.2 Definição. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada *a segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta\colon T_pM \to T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

2.3 Proposição. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente, e tangentes a M. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. □

2.4 Exemplo. Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, i.e., $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma *hipersuperfície*. (Observe que uma hipersuperfície pode ter auto-intersecções).

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta\colon T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas (i.e., escolhemos orientações para M e $\overline{M}$) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \ldots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* de f. As funções simétricas de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(S_\eta) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ é denominada a *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ é denominada a *curvatura média* de f.

Um caso importante ocorre quando $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, podemos dar uma interpretação geométrica interessante de S_η. Inicialmente, seja N uma extensão local de η, unitária e normal a M. Seja $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ e

defina a *aplicação normal de Gauss*, $g\colon M^n \to S_1^n$, transladando a origem do campo N para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo

$$g(q) = \text{ ponto final do transladado de } N(q).$$

Como T_qM e $T_{g(q)}(S_1^n)$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que $dg_q\colon T_qM \to T_qM$ é dada por

$$dg_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -S_\eta(x),$$

onde $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva com $c(0) = q$, $c'(0) = x$, e onde usamos o fato que $\langle N, N\rangle = 1$ para garantir que $\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T$. Segue-se que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

O estudo da aplicação de Gauss tem profundas implicações topológicas. Como um exemplo, provaremos o seguinte fato: Seja M^n, $n \geq 2$, uma variedade conexa, compacta e orientável. Se existe uma imersão $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não nula em todos os pontos de M, então M é difeomorfa a S_1^n. A prova depende de propriedades dos espaços de recobrimento (v., por exemplo, M. do Carmo [dC 2] §5.6). De fato, como $\det(dg_p) \neq 0$, a aplicação de Gauss, $g\colon M \to S_1^n$ é um difeomorfismo local. Como M é compacta, g é uma aplicação de recobrimento, e como S_1^n é simplesmente conexa, g é um difeomorfismo.

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y. Uma outra demonstração do teorema abaixo se encontra na Seção 3 deste capítulo.

2.5 Teorema (Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$(1) \qquad K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2.$$

Demonstração: Sejam X, Y extensões locais ortogonais de x, y, respectivamente, e tangentes a M; indicaremos por $\overline{X}$, $\overline{Y}$ as extensões locais de X, Y a $\overline{M}$. Então

$$\begin{aligned} K(x,y) - \overline{K}(x,y) \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}), Y \rangle(p) \\ &\quad + \langle \nabla_{[X,Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p). \end{aligned}$$

Observe inicialmente que o último termo se anula, pois

$$\langle \nabla_{[X,Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p) = -\langle (\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X})^N, Y \rangle(p) = 0.$$

Por outro lado, se indicarmos por $E_1, \ldots, E_m$, $m = \dim \overline{M} - \dim M$, campos locais ortonormais e normais a M, teremos que

$$B(X,Y) = \sum_i H_i(X,Y) E_i, \quad H_i = H_{E_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Portanto, em p,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} &= \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \Big(\sum_i H_i(X,X) E_i + \nabla_X X \Big) \\ &= \sum_i \big\{ H_i(X,X) \overline{\nabla}_{\overline{Y}} E_i + \overline{Y} H_i(X,X) E_i \big\} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X. \end{aligned}$$

Logo, em p,

$$(2) \quad \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}, Y \rangle = -\sum_i H_i(X,X) H_i(Y,Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Analogamente,

$$(3) \quad \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, Y \rangle = -\sum_i H_i(X,Y) H_i(X,Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle.$$

Usando (2) e (3), obteremos (1). □

2.6 Observação. No caso de hipersuperfície $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a fórmula de Gauss (1) admite uma expressão mais simples. Sejam

$p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $S_\eta = S$ é diagonal, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios de S. Então $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto (1) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \,. \tag{4}$$

2.7 Observação. No caso em que $M = M^2 \subset \overline{M} = \mathbb{R}^3$, o produto $\lambda_1 \lambda_2$ das curvaturas principais é conhecido como a curvatura Gaussiana da superfície. Neste caso, a observação acima mostra que a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em uma superfície, e implica o famoso Teorema Egregium de Gauss, o qual afirma que a curvatura Gaussiana de $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é invariante por isometrias.

2.8 Exemplo (*curvatura de* S^n). Vamos mostrar que a curvatura seccional da esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é constante e igual a 1.

Para isto, oriente S^n pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$. A aplicação normal de Gauss é então igual a $(-i)$, onde i é a identidade de S^n. Decorre daí que a aplicação auto-adjunta associada a H_N tem todos os seus valores próprios iguais a 1. Isto significa que para todo $p \in S^n$, todo $v \in T_pS^n$ é um vetor próprio. Usando a expressão (4), conclui-se que qualquer curvatura seccional de S^n é igual a 1, como havíamos afirmado.

Uma imersão $f\colon M \to \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo $p \in M$. A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

2.9 Proposição. *Uma imersão* $f\colon M \to \overline{M}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se e só se toda geodésica* γ *de* M *partindo de* p *é geodésica de* $\overline{M}$ *em* p.

Demonstração: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = x$. Sejam N uma extensão local, normal a M, de um vetor normal η em p e X

uma extensão local, tangente a M, de $\gamma'(t)$. Como $\langle X, N\rangle = 0$, obteremos em p,

$$\begin{aligned} H_\eta(x,x) &= \langle S_\eta(x), x\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X N, X\rangle \\ &= -X\langle N, X\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle = \langle N, \overline{\nabla}_X X\rangle. \end{aligned}$$

Decorre daí que f é geodésica em p se e só se, para todo $x \in T_pM$, a geodésica γ de M que é tangente a x em p satisfaz à condição: $\overline{\nabla}_X X(p)$ não tem componente normal. Portanto f é geodésica em p se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p. □

A Proposição 2.9 permite obter o que é provavelmente a melhor interpretação geométrica da curvatura seccional. Seja M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Seja $B \subset T_pM$ uma bola aberta de T_pM onde $\exp_p$ é um difeomorfismo, e seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois. Então $\exp_p(\sigma \cap B) = S$ é uma subvariedade de dimensão dois em M passando por p. Intuitivamente, S é uma superfície formada por "pequenas"geodésicas que saem de p e são tangentes a σ em p. Pela Proposição 2.9, S é geodésica em p, donde as segundas formas fundamentais da inclusão $i\colon S \subset M$ são nulas em p. Como subvariedade de M, S possui uma métrica Riemanniana induzida, cuja curvatura Gaussiana em p será indicada por K_S. Decorre da fórmula de Gauss que

$$K_S(p) = K(p, \sigma).$$

Em outras palavras, a curvatura seccional $K(p,\sigma)$ é a curvatura Gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que saem de p e são tangentes a σ. Esta foi exatamente a maneira pela qual Riemann definiu curvatura seccional em [Ri].

Exemplos de subvariedades totalmente geodésicas são raros. No caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, os subespaços lineares são evidentemente subvariedades totalmente geodésicas. No caso em que $\overline{M} = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, as intersecções $\sum$ de subespaços lineares do $\mathbb{R}^{n+1}$ com S^n são subvariedades totalmente geodésicas. Isto

provém do fato que para todo $p \in \sum$, as geodésicas de S^n que partem de p e são tangentes a $\sum$ são geodésicas de $\sum$.

Foi demonstrado por E. Cartan que se uma variedade Riemanniana M é tal que, para todo $p \in M$ e todo subespaço de dimensão dois $\sigma \subset T_pM$, existe uma subvariedade totalmente geodésica de M tangente a σ, então M tem curvatura seccional constante. (Para uma demonstração deste teorema v. L. Rodríguez [Ro]).

Uma condição mais fraca do que a de totalmente geodésica é a condição de mínima.

2.10 Definição. Uma imersão $f\colon M \to \overline{M}$ é *mínima* se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que traço $S_\eta = 0$.

Escolhendo um referencial ortornormal $E_1, \ldots, E_m$ de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podemos escrever, em p,

$$B(x,y) = \sum_i H_i(x,y)E_i\,, \quad x, y \in T_pM, \quad i = 1, \ldots, m,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i (\text{traço } S_i)E_i\,,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, não depende do referencial E_i escolhido. O vetor H é chamado o *vetor curvatura média* de f. É claro que f é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida do mesmo modo que as geodésicas minimizam o comprimento de arco. Mais precisamente, se $M \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mínima e $D \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de M com bordo ∂D regular, então o volume de D na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de $\overline{M}$ com o mesmo bordo.

Não entraremos aqui em detalhes. Existe uma vasta literatura sobre o assunto e o leitor poderá consultar Chern [Ch],

Lawson [La], ou Osserman [Os]. Mesmo em dimensão $n = 2$, o tópico tem estado bastante ativo, particularmente em questões relacionadas com o problema de Plateau (Cf. o Cap. 2 de Lawson [La]). Para conhecimento de alguns problemas correntes, o leitor poderá consultar W. Meeks [Me] e M. do Carmo, *Minimal Surfaces: stability and finiteness*, Congresso Internacional de Matemáticos, Helsinki, 1978.

A teoria das imersões isométricas é, em si própria, um vasto domínio da Geometria Riemanniana, da qual apenas apresentamos os elementos mais simples. O leitor encontrará mais informações sobre o assunto em L. Rodríguez [Ro], M. do Carmo [dC 3], M. Dajczer [Da] e nas referências aí mencionadas.

3 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

Dada uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um *fibrado normal* $TM^\perp$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas ξ, η, ζ, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X\eta)^T = -S_\eta(X)$. Passaremos agora a estudar a componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, que será chamada a *conexão normal* $\nabla^\perp$ da imersão. Explicitamente,

$$(5) \quad \nabla^\perp_X\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^N = \overline{\nabla}_X\eta - (\overline{\nabla}_X\eta)^T = \overline{\nabla}_X\eta + S_\eta(X).$$

Verifica-se facilmente que a conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva

em η, e

$$\nabla^{\perp}_X(f\eta) = f\nabla^{\perp}_X\eta + X(f)\eta, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão e definida por

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\eta - \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\eta + \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta.$$

Tudo se passa como se a geometria da imersão se decompuzesse em duas geometrias: uma geometria do fibrado tangente e uma geometria do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi da teoria das superfícies. O objetivo desta seção é estabelecer tais relações.

3.1 Proposição. *As seguintes equações se verificam:*
(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle,$$

onde $[S_\eta,S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Demonstração: Observe que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$. Como

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\ &= \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + B(X,Z)) - \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + B(Y,Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(Y,\nabla_X Z) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) \\ &\quad - S_{B(X,Z)}Y - B(X,\nabla_Y Z) - \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) \\ &\quad + S_{B(Y,Z)}X + B([X,Y],Z).\end{aligned} \tag{6}$$

Tomando o produto interno de (6) com T, os termos normais se anulam, e obteremos finalmente

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle S_{B(X,Z)}Y,T\rangle + \langle S_{B(Y,Z)}X,T\rangle \\ &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle \\ &\quad + \langle B(X,T),B(Y,T)\rangle\end{aligned}$$

que é a equação de Gauss.

Para obter a equação de Ricci, calculamos

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)\eta &= \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\eta - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\eta + \overline{\nabla}_{[X,Y]}\eta \\ &= \overline{\nabla}_Y(\nabla^\perp_X\eta - S_\eta X) - \overline{\nabla}_X(\nabla^\perp_Y\eta - S_\eta Y) \\ &\quad + \nabla^\perp_{[X,Y]}\eta - S_\eta[X,Y] \\ &= R^\perp(X,Y)\eta - S_{\nabla^\perp_X\eta}Y - \nabla_Y(S_\eta X) - B(S_\eta X,Y) \\ &\quad + S_{\nabla^\perp_Y\eta}X + \nabla_X(S_\eta Y) + B(X,S_\eta Y) - S_\eta[X,Y].\end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por ζ e observando que $\langle B(X,Y),\eta\rangle = \langle S_\eta X,Y\rangle$, obteremos

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle &= \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle B(S_\eta X,Y),\zeta\rangle \\ &\quad + \langle B(X,S_\eta Y),\zeta\rangle \\ &= \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle + \langle (S_\eta S_\zeta - S_\zeta S_\eta)X,Y\rangle \\ &= \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle + \langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle,\end{aligned}$$

que é a equação de Ricci. □

3.2 Observação. Da equação de Gauss decorre, como caso particular, o Teorema 2.5 deste capítulo.

3.3 Observação. Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é *plano* (flat, em inglês) se $R^\perp = 0$. Admita que o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve

$$\langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle.$$

Decorre daí que $R^{\perp} = 0$ se e só se $[S_\eta, S_\zeta] = 0$ para todo η, ζ, isto é, se e só se para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os S_η (V. [G], p. 108).

As equações de Gauss e de Ricci são expressões algébricas que relacionam as curvaturas dos fibrados tangente e normal, respectivamente, com a segunda forma fundamental da imersão. Uma relação não-algébrica é dada pela equação de Codazzi, para a qual precisamos "derivar"a segunda forma fundamental considerada como um tensor.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural:

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta) &- B(\nabla_X Y, Z, \eta) \\ &- B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla^{\perp}_X \eta).\end{aligned}$$

3.4 Proposição (Equação de Codazzi). *Com a notação acima*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Demonstração: Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= X\langle B(Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle \\ &\quad - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle B(Y, Z), \nabla^{\perp}_X \eta \rangle \\ &= \langle \nabla^{\perp}_X (B(Y, Z)), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle \\ &\quad - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle.\end{aligned}$$

Considere agora a expressão (6) na demonstração da Proposição 3.1, e multiplique ambos os membros de (6) por η. Obteremos, levando em conta a observação acima,

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle &= \langle B(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle + \langle \nabla^{\perp}_Y B(X,Z),\eta\rangle \\ &\quad - \langle B(X,\nabla_Y Z),\eta\rangle - \langle \nabla^{\perp}_X B(Y,Z),\eta\rangle \\ &\quad + \langle B(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle - \langle B(\nabla_Y X,Z)\eta\rangle \\ &= -(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) + (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta)\end{aligned}$$

que é a equação de Codazzi. □

3.5 Observação. Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta).$$

Se, além disto, a codimensão da imersão é 1, $\nabla^{\perp}_X \eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X B(Y,Z,\eta) &= +X\langle S_\eta(Y),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle \\ &\quad - \langle S_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle \\ &= +\langle \nabla_X(S_\eta(Y)),Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X,Y]).$$

A importância das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo aos das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies (Cf. M. do Carmo [dC 2], p.235-236). Em verdade, as equações de compatibilidade da teoria das superfícies são apenas casos particulares das equações de Gauss e Codazzi obtidas nesta seção. No caso presente, é possível enunciar um teorema análogo ao teorema fundamental da teoria local das superfícies (cf. loc. cit. pg. 236). Referimos o leitor ao artigo de K. Tenenblat, "On isometric immersions of Riemannnian manifolds", Boletim da Soc. Bras. de Mat. vol. 2 (1971), 23-36. Uma bela discussão sobre o assunto pode ser encontrada no artigo de H. Jacobowitz, "The Gauss-Codazzi equations", Tensor N.S., 39 (1982), 15-22.

Exercícios

1. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas, e considere o produto $M_1 \times M_2$ com a métrica produto. Seja ∇^1 a conexão Riemanniana de M_1 e ∇^2 a conexão Riemanniana de M_2.

   a) Mostre que a conexão Riemanniana ∇ de $M_1 \times M_2$ é dada por $\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla^1_{Y_1} X_1 + \nabla^2_{Y_2} X_2$, $X_1, Y_1 \in \mathcal{X}(M_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathcal{X}(M_2)$.

   b) Para cada $p \in M_1$, o conjunto $(M_2)_p = \{(p, q) \in M_1 \times M_2; q \in M_2\}$ é uma subvariedade de $M_1 \times M_2$, naturalmente difeomorfa a M_2. Prove que $(M_2)_p$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M_1 \times M_2$.

   c) Seja $\sigma(x, y) \subset T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ um plano tal que $x \in T_p M_1$ e $y \in T_q M_2$. Mostre que $K(\sigma) = 0$.

2. Mostre que $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\boldsymbol{x}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi), (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

   é uma imersão de $\mathbb{R}^2$ na esfera unitária $S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$, cuja imagem $\boldsymbol{x}(\mathbb{R}^2)$ é um toro T^2 com curvatura seccional zero na métrica induzida.

3. Sejam M uma variedade Riemanniana e $N \subset K \subset M$ subvariedades de M. Suponha que N é totalmente geodésica em K e que K é totalmente geodésica em M. Prove que N é totalmente geodésica em M.

4. Sejam $N_1 \subset M_1$, $N_2 \subset M_2$ subvariedades totalmente geodésicas das variedades Riemannianas M_1 e M_2. Prove que $N_1 \times N_2$ é uma subvariedade totalmente geodésica do produto $M_1 \times M_2$ com a métrica produto.

5. Prove que a curvatura seccional da variedade Riemanniana $S^2 \times S^2$ com a métrica produto, onde S^2 é a esfera unitária

em $\mathbb{R}^3$, é não negativa. Ache um toro plano, totalmente geodésico, T^2, mergulhado em $S^2 \times S^2$.

6. Seja G um grupo de Lie com a métrica bi-invariante. Seja H um grupo de Lie e $h\colon H \to G$ uma imersão que é um homomorfismo de grupo (isto é, H é um subgrupo de Lie de G). Mostre que h é uma imersão totalmente geodésica.

7. Mostre que se M é uma subvariedade totalmente geodésica de $\overline{M}$, então, para campos tangentes a M, ∇ e $\overline{\nabla}$ coincidem.

8. (*O toro de Clifford*). Considere a imersão $\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada no Exercício 2.

   a) Mostre que os vetores

   $$e_1 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, -\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$$

   formam uma base ortonormal do espaço tangente, e que os vetores $n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$, $n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ formam uma base ortonormal do espaço normal.

   b) Use o fato que

   $$\langle S_{n_k}(e_i), e_j\rangle = -\langle \overline{\nabla}_{e_i} n_k, e_j\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, n_k\rangle,$$

   onde $\overline{\nabla}$ é a derivada covariante (isto é, a derivada usual) de $\mathbb{R}^4$, e $i, j, k = 1, 2$, para concluir que as matrizes de S_{n_1} e S_{n_2} na base $\{e_1, e_2\}$ são, respectivamente,

   $$S_{n_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   $$S_{n_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   c) Conclua que a imersão do toro T^2 na esfera unitária $S^3(1)$ induzida por $\boldsymbol{x}$ (o toro de Clifford) (Cf. Exercício 2) é uma imersão mínima.

9. Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão. Seja $\eta \in (T_qM)^\perp$, $p \in M$ e $V = T_pM \oplus \mathbb{R}\eta \subset \mathbb{R}^{m+n}$, onde $\mathbb{R}\eta = \{\lambda\eta \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Seja $\pi\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ a projeção ortogonal sobre $T_pM \oplus \mathbb{R}\eta$. Como η é transversal a M em p, $\pi|U$ é um mergulho, onde U é uma vizinhança suficientemente pequena de p em M. Seja $M' = \pi(U) \subset T_pM \oplus \mathbb{R}\eta$ e seja $S'_\eta\colon T_pM' = T_pM \to T_pM'$ o operador associado à segunda forma quadrática de M', em p na direção de η. Mostre que $S'_\eta = S_\eta$, onde $S_\eta\colon T_pM \to T_pM$ é o operador associado à segunda forma de M, em p na direção η.
Sugestão: Sejam N e N' campos normais ao longo de U e $\pi(U)$, respectivamente, tais que $N(p) = N'(p) = \eta$. Então se $X \in T_pM$, $S_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T$ e $S'_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X N')^T$. Mostre que é possível escolher N de modo que $N' = d\pi(N)$ e observe que a restrição $d\pi|T_pM = \mathrm{id}$. Logo, em p, $S'_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X(d\pi N))^T = -d\pi(\overline{\nabla}_X N)^T = S_\eta(X)$.

10. Seja $x\colon M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e seja $S_\eta : TM \to TM$ o operador associado à segunda forma quadrática de x segundo o campo normal η. Considere S_η como um tensor de ordem 2 dado por $S_\eta(X,Y) = \langle S_\eta(X), Y\rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Observe que dizer que operador S_η é auto-adjunto equivale a dizer que o tensor S_η é simétrico, isto é, $S_\eta(X,Y) = S_\eta(Y,X)$. Prove que para todo $V \in \mathcal{X}(M)$, o tensor $\nabla_V S_\eta$ é simétrico.
Sugestão: Derivando $\langle S_\eta X, Y\rangle = \langle X, S_\eta Y\rangle$ em relação a V, obtém-se

$$\begin{aligned}&\langle \nabla_V(S_\eta X), Y\rangle + \langle S_\eta X, \nabla_V Y\rangle \\ &= \langle \nabla_V X, S_\eta Y\rangle + \langle X, \nabla_V(S_\eta Y)\rangle.\end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\langle (\nabla_V S_\eta)X, Y\rangle = \langle \nabla_V(S_\eta X), Y\rangle - \langle S_\eta(\nabla_V X), Y\rangle$$

e a expressão anterior, obtém-se facilmente que

$$\langle (\nabla_V S_\eta)X, Y\rangle = \langle X, (\nabla_V S_\eta)Y\rangle.$$

11. Seja $f\colon \overline{M}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Defina o *hessiano* Hess f de f em $p \in \overline{M}$ como um operador linear

$$\text{Hess } f\colon T_p\overline{M} \to T_p\overline{M},\ (\text{Hess } f)Y = \overline{\nabla}_Y \operatorname{grad} f,\ Y \in T_p\overline{M},$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Seja a um valor regular de f e seja $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$ a hipersuperfície de $\overline{M}$ definida por $M = \{p \in \overline{M}; f(p) = a\}$. Prove que:

a) O Laplaciano $\overline{\Delta} f$ é dado por

$$\overline{\Delta} f = \text{ traço Hess } f.$$

b) Se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ isto é, X e Y são perpendiculares a $\operatorname{grad} f$,

$$\langle (\text{Hess } f)Y, X\rangle = \langle Y, (\text{Hess } f)X\rangle.$$

Conclua que Hess f restrito a TM é auto-adjunto, logo determina uma forma bilinear simétrica em T_pM, $p \in N$, dada por $(\text{Hess } f)(X,Y) = \langle (\text{Hess } f)X, Y\rangle$, $X, Y \in T_pM$.

c) A curvatura média H de $M \subset \overline{M}$ é dada por

$$nH = -\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}\right).$$

Sugestão: Tome um referencial ortonormal $E_1, \ldots, E_n$, $E_{n+1} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \eta$ em uma vizinhança de $p \in M$ em $\overline{M}$, e use a definição da divergência do Exercício 8,

Cap. III, para obter

$$\begin{aligned} nH = \text{ traço } S_\eta &= \sum_{i=1}^{n} \langle S_\eta(E_i), E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i}\eta, E_i \rangle - \langle \overline{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{E_i}(\eta), E_i \rangle = -\operatorname{div}_{\overline{M}} \eta \\ &= -\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}\right). \end{aligned}$$

d) Observe que toda hipersuperfície mergulhada $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$ é localmente a imagem inversa de um valor regular. Conclua de (c) que a curvatura média H de tal hipersuperfície é dada por

$$H = -\frac{1}{n} \operatorname{div} N,$$

onde N é uma extensão local adequada do vetor normal unitário de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$.

12. (*Singularidades de um campo de Killing*). Seja X um campo de Killing em uma variedade Riemanniana M. Seja $N = \{p \in M; X(p) = 0\}$. Prove que:

a) Se $p \in N$, $V \subset M$ é uma vizinhança normal de p, e $q \in N \cap V$, então o segmento de geodésica radial γ ligando p a q está contido em N. Conclua que $\gamma \cap V \subset N$.

b) Se $p \in N$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $V \cap N$ é uma subvariedade de M (isto implica que toda componente conexa de N é uma subvariedade de M).

Sugestão: Proceda por indução, usando (a). Se p é isolado, não há o que fazer. Caso contrário, seja $V \subset M$ uma vizinhança normal de p tal que existe $q_1 \in V \cap N$ e considere a geodésica radial γ_1 ligando p a q_1. Se $V \cap N = \gamma_1$, por (a), teremos concluido a demonstração. Caso contrário, seja $q_2 \in V \cap N - \{\gamma_1\}$ e seja γ_2 a geodésica radial ligando p a q_2. Seja $Q \subset T_pM$ o subespaço gerado pelos vetores $\exp_p^{-1}(q_1)$ e $\exp_p^{-1}(q_2)$ e seja $N_2 = \exp_p(Q \cap \exp_p^{-1}(V))$. Mostre que para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição a Q da diferencial $(dX_t)_p$ do fluxo $X_t\colon M \to M$ é a identidade; conclua daí que $N_2 \subset V \cap N$. Proceda desta maneira até esgotar a dimensão de T_pM.

c) A codimensão, como subvariedade de M, de uma componente conexa N_k de N é par. Admita o seguinte fato: se uma esfera possui um campo diferenciável não nulo então sua dimensão é ímpar (para uma demonstração, v. Lima, [Li], pg. 146).

Sugestão: Seja $E_p = (T_pN_k)^\perp$ e seja $V \subset M$ uma vizinhança normal de p. Indique por $N_k^\perp = \exp_p(E_p \cap \exp_p^{-1}(V))$. Como, para todo t, $(dX_t)_p\colon E_p \to E_p$, temos que X é tangente a $N_k^\perp$. Por outro lado, $X \neq 0$ é tangente às esferas geodésicas de $N_k^\perp$ com centro p. Pelo resultado mencionado acima, a dimensão de uma tal esfera é ímpar. Logo $\dim N_k^\perp = \dim E_p$ é par.

Capítulo VII

Variedades Completas; Os Teoremas de Hopf e Rinow e de Hadamard

1 Introdução

Até agora, estudamos essencialmente propriedades locais das variedades Riemannianas. Entretanto, um dos aspectos mais interessantes da Geometria Diferencial é a interligação que existe entre as propriedades locais e as propriedades globais de uma variedade Riemanniana. Por propriedades locais, entendemos aquelas propriedades que só dependam do comportamento da variedade em uma vizinhança de um ponto, e por propriedades globais, aquelas que dependem do comportamento da variedade como um todo.

Neste capítulo, iniciamos o estudo das relações entre as propriedades locais e globais. Primeiro, definimos o "habitat" natural das propriedades globais, a saber, uma variedade Riemanniana completa M, como uma variedade na qual as geodésicas estão definidas para qualquer valor do parâmetro (Cf. Def. 2.2). Formalmente, isto significa que para todo $p \in M$, $\exp_p$ está

definida em todo o T_pM; intuitivamente, isto significa que a variedade não possui "furos"ou fronteiras.

O que torna úteis as variedades completas é o fato que (Teorema de Hopf e Rinow) dados dois pontos quaisquer de uma tal variedade existe uma geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Demonstraremos este resultado no Teorema 2.8 junto com outros fatos que implicam, por exemplo, que uma variedade compacta é completa e que uma subvariedade fechada de uma variedade completa é uma variedade completa.

Como aplicação do Teorema de Hopf e Rinow, demonstraremos o teorema de Hadamard que afirma ser homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ uma variedade completa, de dimensão n, simplesmente conexa e cuja curvatura seccional satisfaz $K \leq 0$. Este é um exemplo de relações entre propriedades locais e globais, onde condições locais ($K \leq 0$) junto com restrições globais fracas (completa e simplesmente conexa) implicam em uma forte restrição global (ser homeomorfa a $\mathbb{R}^n$).

De agora em diante, exceto quando explicitamente mencionado, as variedades serão supostas conexas.

2 Variedades completas: Teorema de Hopf e Rinow

Quando queremos estudar propriedades globais de uma variedade diferenciável M, devemos exigir que M não seja uma subvariedade própria, aberta, de uma variedade M'. A condição usual para assegurar esta não-estendabilidade é a compacidade. Em alguns casos, porém, gostaríamos de usar uma condição mais fraca e uma definição natural seria a seguinte.

2.1 Definição. Uma variedade Riemanniana M é *estendível* se existe uma variedade Riemanniana M' tal que M é isométrica a um subconjunto próprio aberto de M'. Caso contrário, M é *não-estendível.*

Acontece que a classe das variedades Riemannianas não-esten-

díveis é grande demais. Um subconjunto adequado desta classe é dado na seguinte definição.

2.2 Definição. Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) *completa* se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_pM$, i.e., se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

2.3 Proposição. *Se M é completa então M é não-estendível.*

Demonstração: Suponha que $M \subset M'$ é isométrica a um subconjunto próprio, aberto, de uma variedade Riemanniana M'. Pela conexidade de M', a fronteira ∂M de M em M' é não vazia. Sejam $p \in \partial M$ e $U' \subset M'$ uma vizinhança normal de p em M'. Seja $q \in U' \cap M$ e $\tilde{\gamma}(t)$ uma geodésica em M' com $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}(1) = q$. Então $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$, $|t| < \delta$, é uma geodésica em M com $\gamma(0) = q$. Esta geodésica não está definida para algum $t \leq 1$, o que contradiz o fato de M ser completa. □

É possível mostrar, por um exemplo, que a recíproca não é verdadeira (cf. Exercício 4) e conseqüentemente que a classe das não-estendíveis é realmente maior do que a classe das variedades completas.

É conveniente introduzir uma distância numa variedade Riemanniana (não necessariamente completa) M como se segue. Dados dois pontos $p, q \in M$, considere as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q. Como M é conexa, uma tal curva existe (cubra uma curva contínua ligando p a q por um número infinito de vizinhanças coordenadas e substitua cada "pedaço"contido em uma vizinhança coordenada por uma curva diferenciável).

2.4 Definição. A *distância* $d(p,q)$ é definida por $d(p,q) =$ ínfimo dos comprimentos de todas as curvas $f_{p,q}$, onde $f_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q.

2.5 Proposição. *Com a distância d, M é um espaço métrico, isto é:*

1) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$,

2) $d(p,q) = d(q,p)$,
3) $d(p,q) \geq 0$, *e* $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Demonstração: (1), (2) e duas das afirmações de (3) são conseqüências imediatas da definição de ínfimo. Resta verificar que se $d(p,q) = 0$ então $p = q$. Suponha o contrário, e tome uma bola normal $B_r(p)$ que não contenha q. Como $d(p,q) = 0$, existe uma curva c ligando p a q de comprimento menor que r. Mas o segmento de c contido em $B_r(p)$ já tem comprimento maior ou igual que r, pela Proposição 3.6 do Capítulo III, e isto é uma contradição. □

Observe que se existe uma geodésica minimizante γ ligando p a q (o que nem sempre é verdade) então $d(p,q) =$ comprimento γ.

2.6 Proposição. *A topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M.*

Demonstração: Da observação acima, segue-se que se r é suficientemente pequeno, a bola geodésica $B_r(p)$ coincide com a bola métrica de raio r, centrada em p. Assim, bolas métricas contêm bolas geodésicas, e reciprocamente. □

2.7 Corolário. *Se* $p_0 \in M$, *a função* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(p) = d(p,p_0)$ *é contínua.*

Pois, como é fácil de verificar, a função f é contínua na topologia induzida por d.

O fato que torna relevante o conceito de completeza é o seguinte teorema.

2.8 Teorema. (Hopf e Rinow [HR]). *Seja M uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\exp_p$ *está definida em todo o* $T_p(M)$.

b) *Os limitados e fechados de M são compactos.*

c) *M é completa como espaço métrico.*

d) *M é geodesicamente completa.*

e) *Existe uma sucessão de compactos* $K_n \subset M$, $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$, *tais que se* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p, q_n) \to \infty$. (*Aqui* $\operatorname{int} A$ *indica o interior do conjunto* A).

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

f) *Para todo* $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração: a) $\Rightarrow$ f). Sejam $d(p, q) = r$, $B_\delta(p)$ uma bola normal em p, e $S_\delta(p) = S$ a fronteira de $B_\delta(p)$. Seja x_0 um ponto onde a função contínua $d(q, x)$, $x \in S$, atinge um mínimo. Então $x_0 = \exp_p \delta v$, onde $v \in T_pM$ e $|v| = 1$. Seja γ a geodésica dada por $\gamma(s) = \exp_p sv$ (v. Fig. 1). Vamos mostrar que $\gamma(r) = q$.

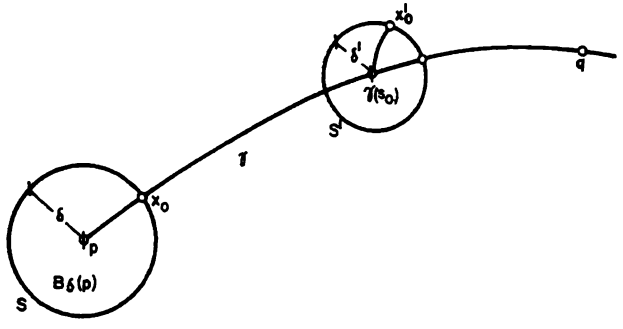


Figura 1

Para provar este fato, consideremos a equação

$$d(\gamma(s), q) = r - s \tag{1}$$

e seja $A = \{s \in [0, r];\ (1) \text{ vale}\}$. $A \neq \varnothing$ pois (1) vale para $s = 0$. Além disto, A é fechado em $[0, r]$. Seja $s_0 \in A$. Vamos provar que se $s_0 < r$, então (1) vale para $s_0 + \delta'$, onde $\delta' > 0$ é suficientemente pequeno. Isto implica que $\sup A = r$; como A é fechado, então $r \in A$, o que mostra que $\gamma(r) = q$.

Para provar que (1) vale para $s_0 + \delta'$, seja $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ uma bola normal em $\gamma(s_0)$, seja $S' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ sua fronteira, e seja x_0' um ponto de mínimo de $d(x, q)$, $x \in S'$. Basta mostrar que $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$. Com efeito, se $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$, como

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + \min_{x \in S'} d(x, q) = \delta' + d(x_0', q)$$

e

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0\,,$$

teremos

$$(2) \qquad r - s_0 = \delta' + d(x_0', q) = \delta' + d(\gamma(x_0 + \delta'), q),$$

ou seja

$$d(\gamma(x_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta'),$$

que é (1) para $s_0 + \delta'$.

Para provar finalmente que $\gamma(x_0 + \delta') = x_0'$, observe que, pela desigualdade triangular e pela primeira igualdade de (2),

$$d(p, x_0') \geq d(p, q) - d(q, x_0') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

Por outro lado, a curva quebrada ligando p a x_0', que vai de p a $\gamma(s_0)$ pela geodésica γ, e de $\gamma(s_0)$ a x_0' por um raio geodésico, tem comprimento igual a $s_0 + \delta'$. Logo $d(p, x_0') = s_0 + \delta'$, e uma tal curva, pelo Corolário 3.9 do Capítulo III, é uma geodésica. Em particular, a curva não é quebrada, donde $\gamma(x_0 + \delta') = x_0'$. Isto conclui a demonstração que a) $\Rightarrow$ f).

a) $\Rightarrow$ b). Seja $A \subset M$ limitado e fechado. Como A é limitado, $A \subset B$, onde B é uma bola na métrica d de centro p. Por (f), existe uma bola $B_r(0) \subset T_pM$, tal que $B \subset \exp_p \overline{B_r(0)}$. Como imagem contínua de um compacto, $\exp_p \overline{B_r(0)}$ é compacto. Logo, A é um fechado contido em um compacto, donde compacto.

b) $\Rightarrow$ c). Basta observar que o conjunto $\{p_n\}$ formado por uma seqüência de Cauchy é limitado, donde tem fecho compacto por (b). Assim $\{p_n\}$ contém uma subseqüência convergente e, sendo de Cauchy, converge.

c) $\Rightarrow$ d). Suponha que M não é geodesicamente completa. Então alguma geodésica normalizada γ de M está definida para $s < s_0$ e não está definida para s_0. Seja $\{s_n\}$ uma seqüência convergindo para s_0 com $s_n < s_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que se $n, m > n_0$ então $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Decorre daí que

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

e assim a seqüência $\{\gamma(s_n)\}$ é de Cauchy em M. Como M é completa na métrica d, $\{\gamma(s_n)\} \to p_0 \in M$.

Seja (W, δ) uma vizinhança totalmente normal de p_0. Escolha n_1 tal que se $n, m > n_1$, então $|s_m - s_n| < \delta$ e $\gamma(s_n)$, $\gamma(s_m)$ pertencem a W. Logo, existe uma única geodésica g de comprimento menor do que δ ligando $\gamma(s_n)$ a $\gamma(s_m)$. É claro que g coincide com γ, onde γ está definida. Como $\exp_{\gamma(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $\exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, g estende γ além de s_0.

d) $\Rightarrow$ a). Óbvio.

b) $\Leftrightarrow$ e). Topologia Geral. □

2.9 Corolário. *Se M é compacta então M é completa.*

2.10 Corolário. *Uma subvariedade fechada de uma variedade Riemanniana completa é completa na métrica induzida; em particular, as subvariedades fechadas de um espaço euclidiano são completas.*

3 O teorema de Hadamard

Como aplicação do Teorema de Hopf-Rinow, vamos demonstrar o seguinte resultado global.

3.1 Teorema (Hadamard). *Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_p(M)$. Então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$; mais precisamente, $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo.*

Antes de iniciar a demonstração, precisamos de alguns lemas. O lema seguinte mostra que a aplicação exponencial de uma variedade de curvatura não positiva é um difeomorfismo local.

3.2 Lema. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $K(p,\sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_pM$. Então, para todo $p \in M$, o lugar dos pontos conjugados $C(p) = \varnothing$; em particular, a aplicação exponencial $\exp_p\colon T_pM \to M$ é um difeomorfismo local.*

Demonstração: Seja J um campo de Jacobi não trivial (isto é, não identicamente nulo) ao longo de uma geodésica $\gamma\colon [0,\infty) \to M$, onde $\gamma(0) = p$ e $J(0) = 0$. Então, pela hipótese sobre a curvatura e pela equação de Jacobi

$$\begin{aligned}\langle J, J\rangle'' &= 2\langle J', J'\rangle + 2\langle J'', J\rangle \\ &= 2\langle J', J'\rangle - 2\langle R(\gamma', J)\gamma', J\rangle \\ &= 2|J'|^2 - 2K(\gamma', J)|\gamma' \wedge J|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto $\langle J, J\rangle'(t_2) \geq \langle J, J\rangle'(t_1)$ sempre que $t_2 > t_1$. Como $J'(0) \neq 0$ e $\langle J, J\rangle'(0) = 0$, segue-se também que, para $t > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$\langle J, J\rangle(t) > \langle J, J\rangle(0).$$

Como $\langle J, J'\rangle'$ não decresce, decorre daí que para todo $t > 0$, $\langle J, J\rangle(t) > 0$, e $\gamma(t)$ não é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ. □

O ponto crucial da demonstração do Teorema de Hadamard é dado no lema abaixo, que tem um interesse independente.

3.3 Lema. *Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja $f\colon M \to N$ um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana N que possui a seguinte propriedade: para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$, tem-se $|df_p(v)| \geq |v|$. Então f é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração: Por uma propriedade de espaços de recobrimento (Cf. M. do Carmo, [dC 2], pg. 383), basta mostrar que f possui a propriedade de levantar arcos de N, isto é, dada

uma curva diferenciável $c\colon [0,1] \to N$ e um ponto $q \in M$ com $f(q) = c(0)$, existe uma curva $\bar{c}\colon [0,1] \to M$ com $\bar{c}(0) = q$ e $f \circ \bar{c} = c$.

Para provar o pedido, observe que, como f é um difeomorfismo local em q, existe $\varepsilon > 0$ tal que é possível definir $\bar{c}\colon [0,\varepsilon] \to M$ com $\bar{c}(0) = q$ e $f \circ \bar{c} = c$, isto é, é possível levantar c em um intervalo pequeno a partir de q. Como f é um difeomorfismo local em todo M, o conjunto dos valores $A \subset [0,1]$, tais que c pode ser levantada em A a partir de q é um intervalo aberto à direita, isto é, $A = [0, t_0)$. Se mostrarmos que $t_0 \in A$, teremos que A é aberto e fechado em $[0,1]$, logo $A = [0,1]$ e c pode ser inteiramente levantada.

Para mostrar que $t_0 \in A$, seja $\{t_n\}$, $n = 1, \ldots$, uma seqüência crescente em A com $\lim t_n = t_0$. Então a seqüência $\{\bar{c}(t_n)\}$ está contida em um compacto $K \subset M$. Com efeito, se isto não acontecer, como M é completa, a distância de $\bar{c}(t_n)$ e $\bar{c}(0)$ será arbitrariamente grande. Como, por hipótese,

$$\ell_{0,t_n}(c) = \int_0^{t_n} \left|\frac{dc}{dt}\right| dt = \int_0^{t_n} \left| df_{\bar{c}(t)} \left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)\right| dt$$
$$\geq \int_0^{t_n} \left|\frac{d\bar{c}}{dt}\right| dt \geq d(\bar{c}(t_n), \bar{c}(0)),$$

isto implica que o comprimento de c entre 0 e t_0 é arbitrariamente grande, o que é um absurdo, e prova a afirmação feita.

Como $\{\bar{c}(t_n)\} \subset K$, $n = 1, \ldots$, existe um ponto de acumulação $r \in M$ de $\{\bar{c}(t_n)\}$. Seja V uma vizinhança de r tal que $f|V$ é um difeomorfismo. Então $c(t_0) \in f(V)$ e, por continuidade, existe um intervalo $I \subset [0,1]$, $t_0 \in I$, tal que $c(I) \subset f(V)$. Escolha um índice n tal que $\bar{c}(t_n) \in V$ e considere o levantamento g de c em I passando por r. Os levantamentos g e $\bar{c}$ coincidem em $[0, t_n) \cap I$, pois $f|V$ é biunívoca. Portanto, g é uma extensão de $\bar{c}$ em I, donde $\bar{c}$ está definido em t_0 e $t_0 \in A$. □

Demonstração do Teorema de Hadamard: Como M é completa, $\exp_p\colon T_pM \to M$ está bem definida para todo $p \in M$ e é sobrejetiva. Pelo Lema 3.2, $\exp_p$ é um difeomorfismo local.

Isto permite introduzir uma métrica Riemanniana em T_pM de modo que $\exp_p$ é uma isometria local. Uma tal métrica é completa, pois as geodésicas de T_pM passando pela origem são retas (Cf. Teorema 2.8, (a) $\Rightarrow$ (d)). Pelo Lema 3.3, $\exp_p$ é uma aplicação de recobrimento. Como M é simplesmente conexa, $\exp_p$ é um difeomorfismo. □

3.4 Observação. A demonstração que acabamos de apresentar prova um pouco mais que o enunciado. Chamemos *pólo* um ponto p de uma variedade Riemanniana completa M que possui a propriedade de não ter pontos conjugados. Todo ponto de uma variedade completa M de curvatura não-positiva é um pólo de M. Podem, entretanto, existir pólos em variedades não compactas de curvatura positiva (v. Exercício 13). O que acabamos de provar foi o resultado geral seguinte. *Se uma variedade Riemanniana M completa e simplesmente conexa possui um pólo, então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$.*

Exercícios

1. Se M, N são variedades Riemannianas tais que a inclusão $i\colon M \subset N$ é uma imersão isométrica, mostre por um exemplo que a desigualdade estrita $d_M > d_N$ pode ocorrer.

2. Seja $\widetilde{M}$ um espaço de recobrimento de uma variedade Riemanniana M. Mostre que é possível dar a $\widetilde{M}$ uma estrutura Riemanniana tal que a aplicação de recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ seja uma isometria local (esta métrica é chamada a *métrica de recobrimento*). Mostre que $\widetilde{M}$ é completa se e somente se M é completa.

3. Seja $f\colon M_1 \to M_2$ um difeomorfismo local de uma variedade M_1 sobre uma variedade Riemanniana M_2. Introduza em M_1 uma métrica Riemanniana tal que f seja uma isometria local. Mostre por um exemplo que se M_2 é completa, M_1 pode não ser completa.

4. Considere o recobrimento universal

$$\pi\colon M \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

do plano euclidiano menos a origem. Introduza em M a métrica de recobrimento (Cf. Exercício 2). Mostre que M não é completa e não-estendível, e que o teorema de Hopf-Rinow não é verdadeiro para M (isto mostra que a noção de não-estendabilidade, apesar de natural, não é satisfatória).
Sugestão: O único ponto difícil é provar que M é não-estendível. Suponha o contrário, isto é, $M \subset M'$, é uma isometria e $M \neq M'$. Seja $p' \in M'$ um ponto na fronteira de M e $W' \subset M'$ uma vizinhança convexa de p'.
Se provarmos que $W' - \{p'\} \subset M$, obteremos uma contradição, pois então $\pi(W' - \{p'\}) = U$ é uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e considerando o círculo fechado em U com centro em $(0,0)$ poderíamos levantá-lo num círculo fechado em M, o que é impossível.
Para provar que $W' - \{p'\} \subset M$, observamos primeiro que por cada ponto $p \in M$ passa uma *única* geodésica em M que não pode ser estendida para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$. Seja $x \in W' \cap M$ e ligue x a p' por uma geodésica $\tilde{\gamma}$ de M'. $\tilde{\gamma}$ coincide inicialmente com uma geodésica de M e portanto é a única geodésica passando por x que não pode ser estendida para todos os valores de t. Da unicidade e do fato de que p' é um ponto da fronteira, segue que todos os pontos de $\tilde{\gamma} \cap W$, exceto p', pertencem a M, pois $\tilde{\gamma}$ se aproxima arbitrariamente da fronteira de M. Finalmente, se $z \in W'$ e $z \notin \tilde{\gamma}$, a geodésica ligando z a x está, pela unicidade acima, inteiramente em M, donde $z \in M$.

5. Uma *curva divergente* em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação diferenciável $\alpha\colon [0,\infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subset M$ existe um $t_0 \in (0,\infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$ (isto é, α "sai" de qualquer compacto de M).

Define-se o comprimento de uma curva divergente por

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t |\alpha'(t)|\,dt.$$

Prove que M é completa se e somente se o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

6. Uma geodésica $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ em uma variedade Riemanniana M é um *raio partindo de* $\gamma(0)$ se ela é minimizante entre $\gamma(0)$ e $\gamma(s)$, para todo $s \in (0,\infty)$. Admita que M é completa, não-compacta, e seja $p \in M$. Mostre que M contém um raio partindo de p.

7. Sejam M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas e $f\colon M \to \overline{M}$ um difeomorfismo. Admita que $\overline{M}$ é completa e que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|v| \geq c|df_p(v)|,$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p(M)$. Prove que M é completa.

8. Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana conexa, e $f\colon M \to \overline{M}$ uma aplicação diferenciável que é localmente uma isometria. Admita que cada dois pontos de $\overline{M}$ podem ser ligados por uma única geodésica de $\overline{M}$. Prove que f é biunívoca e sobrejetiva (e, portanto, f é uma isometria global).

9. Considere o semi-plano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

com a métrica Riemanniana dada por

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \frac{1}{y}\cdot$$

Mostre que o comprimento do segmento vertical

$$x = 0, \quad \varepsilon \leq y \leq 1, \quad \text{com } \varepsilon > 0,$$

tende para 2 quando $\varepsilon \to 0$. Conclua daí que tal métrica não é completa. (Observe, entretanto, que quando $y \to 0$ os comprimentos dos vetores, nesta métrica, se tornam arbitrariamente grandes.)

10. Prove que o semi-plano superior H^2_+ com a métrica de Lobatchevski:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0,$$

é completo.

11. Seja M uma variedade Riemanniana completa, e seja X um campo diferenciável de vetores em M. Suponha que exista uma constante $c > 0$ tal que $|X(p)| < c$, para todo $p \in M$. Prove que as trajetórias de X, isto é, as curvas $\varphi(t)$ em M com $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, estão definidas para todo valor de t.

12. Uma variedade Riemanniana é *homogênea* se dados $p, q \in M$ existe uma isometria de M que leva p em q. Prove que toda variedade homogênea é completa.

13. Mostre que o ponto $p = (0, 0, 0)$ do parabolóide

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x^2 + y^2\}$$

é um pólo de S e, entretanto, a curvatura de S é positiva.

Capítulo VIII

Espaços de Curvatura Constante

1 Introdução

Entre as variedades Riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante são as mais simples. Elas estão relacionadas com a Geometria não-euclidiana clássica, que é historicamente o primeiro exemplo de uma estrutura geométrica diferente da euclidiana.

A propriedade importante dos espaços de curvatura constante é que eles possuem um número suficientemente grande de isometrias locais (Cf. Corolário 2.2). Isto significa que nestes espaços é sempre possível "deslocar" isometricamente dois triângulos pequenos colocados em posições diferentes e verificar se eles podem ser superpostos (em cujo caso diremos que são iguais). Esta propriedade de "livre mobilidade dos triângulos pequenos" é fundamental nas construções da geometria elementar e foi considerada como um postulado a ser satisfeito pelas geometrias não euclidianas.

Não é difícil verificar que quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva c, então a sua curvatura seccional é multiplicada por $1/c$. Logo, a menos de uma

semelhança, podemos supor que a curvatura seccional constante de uma variedade é 1, 0, ou -1. No que se segue, esta hipótese será admita sem maiores comentários.

Até agora encontramos dois exemplos de variedades Riemannianas de curvatura seccional K constante, a saber, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com $K \equiv 0$ e a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com $K \equiv 1$. Neste capítulo, introduziremos uma variedade Riemanniana, o espaço hiperbólico H^n de dimensão n, que tem curvatura seccional $K \equiv -1$. As variedades $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n são completas e simplesmente conexas (Cf. Seção 3). O resultado principal deste capítulo é que estas são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante. Isto permite reduzir o problema de achar todas as variedades completas de curvatura constante ao problema de determinar certos subgrupos dos grupos das isometrias de $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n (Cf. Seção 4).

Para demonstrar o resultado mencionado, introduziremos na Secção 2 um resultado um pouco mais geral sobre a determinação da métrica por meio da curvatura. Estritamente falando, este resultado não se refere a espaços de curvatura constante, mas este é o lugar natural de apresentá-lo.

Usaremos freqüentemente a expressão clássica *espaços de curvatura constante* para designar as variedades Riemannianas de curvatura seccional constante.

Na última Seção deste capítulo, descreveremos as isometrias do espaço hiperbólico H^n e identificaremos algumas hipersuperfícies importantes de H^n, a saber, as horoesferas e as hiperesferas. No exercício 6, indicaremos como calcular as curvaturas médias e seccionais de tais hipersuperfícies.

2 Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura

Sejam M e $\widetilde{M}$ duas variedades Riemannianas de mesma dimensão n e sejam $p \in M$ e $\tilde{p} \in \widetilde{M}$. Escolha uma isometria linear $i\colon T_p(M) \to T_{\tilde{p}}(\widetilde{M})$. Seja $V \subset M$ uma vizinhança normal de p tal que $\exp_{\tilde{p}}$ está definida em $i \circ \exp_p^{-1}(V)$. Defina uma aplicação $f\colon V \to \widetilde{M}$ por

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q), \quad q \in V.$$

Para todo $q \in V$ existe uma única geodésica normalizada $\gamma\colon [0,t] \to M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$. Indicaremos por P_t o transporte paralelo ao longo de γ de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$. Defina ainda $\phi_t\colon T_q(M) \to T_{f(q)}(\widetilde{M})$ por

$$\phi_t(v) = \widetilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v), \quad v \in T_q(M),$$

onde $\widetilde{P}_t$ é o transporte paralelo ao longo da geodésica normalizada $\tilde{\gamma}\colon [0,t] \to \widetilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Finalmente, indicamos por R e $\widetilde{R}$ as curvaturas de M e $\widetilde{M}$, respectivamente.

2.1 Teorema (E. Cartan [Ca], pg. 238). *Com as notações acima, se para todo $q \in V$ e todo $x, y, u, v \in T_q(M)$ tem-se*

$$\langle R(x,y)u, v\rangle = \big\langle \widetilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v)\big\rangle,$$

então $f\colon V \to f(V) \subset \widetilde{M}$ é uma isometria local e $df_p = i$.

Demonstração: Seja $q \in V$ e seja $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$. Seja $v \in T_q(M)$ e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ dado por $J(0) = 0$ e $J(\ell) = v$. Seja $e_1, \ldots, e_n = \gamma'(0)$ uma base ortonormal em $T_p(M)$ e seja $e_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, o transporte paralelo de e_i ao longo de γ. Escrevendo

$$J(t) = \sum_i y_i(t) e_i(t),$$

e usando a equação de Jacobi, concluimos que

$$y_j'' + \sum_i \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j\rangle y_i = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Seja agora $\tilde{\gamma}\colon [0, \ell] \to \widetilde{M}$ uma geodésica normalizada dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Seja $\widetilde{J}(t)$ o campo ao longo de $\tilde{\gamma}$ dado por

$$\widetilde{J}(t) = \phi_t(J(t)), \quad t \in [0, \ell].$$

Seja $\tilde{e}_j(t) = \phi_t(e_j(t))$. Então, pela linearidade de ϕ_t,

$$\widetilde{J}(t) = \sum_i y_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

Como, por hipótese,

$$\langle R(e_n, e_i)e_n, e_j\rangle = \langle \widetilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j\rangle,$$

temos que

$$y_j'' + \sum_i \langle \widetilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j\rangle y_i = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Conclui-se daí que $\widetilde{J}$ é um campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\widetilde{J}(0) = 0$. Como o transporte paralelo é uma isometria, $|\widetilde{J}(\ell)| = |J(\ell)|$. Se mostrarmos que

$$\widetilde{J}(\ell) = df_q(v) = df_q(J(\ell)),$$

teremos concluido a demonstração.

Como $\widetilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$, temos que $\widetilde{J}'(0) = i(J'(0))$. Por outro lado, como $J(t)$ e $\widetilde{J}(t)$ são campos de Jacobi que se anulam em $t = 0$, temos pelo Corolário 2.5 do Capítulo V

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)),$$
$$\widetilde{J}(t) = (d\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\widetilde{J}'(0)).$$

Portanto,

$$\widetilde{J}(\ell) = (d\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)}\ell i(J'(0))$$
$$= (d\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)} \circ i \circ ((d\exp_p)_{\ell\gamma'(0)})^{-1}(J(\ell)) = df_q(J(\ell)),$$

o que prova o pedido. □

Observe que a mesma prova mostra que se $\exp_p$ e $\exp_{\tilde{p}}$ são difeomorfismos, então, nas condições do Teorema 2.1, f está definida em todo o M e é uma isometria.

O teorema afirma que a métrica é, em um certo sentido, determinada localmente pela curvatura. Uma afirmação equivalente foi feita por Riemann ([Ri], p.289). Ao que saibamos, a primeira demonstração do resultado local foi apresentada por E. Cartan ([Ca], pg. 238). Uma versão global do teorema acima, que não apresentaremos aqui, foi dada por W. Ambrose em 1956, [Am 1]. Uma demonstração simples do resultado de Ambrose pode ser encontrada em Cheeger e Ebin [Ce].

Para os nossos objetivos, interessam apenas os dois corolários abaixo. Em particular, o Corolário 2.3 significa que um espaço de curvatura constante é rico em isometrias.

2.2 Corolário. *Sejam M e $\widetilde{M}$ espaços de mesma curvatura constante e de mesma dimensão n. Sejam $p \in M$ e $\tilde{p} \in \widetilde{M}$. Escolha arbitrariamente bases ortonormais $\{e_j\} \in T_p(M)$ e $\{\tilde{e}_j\} \in T_{\tilde{p}}(\widetilde{M})$, $j = 1, \ldots, n$. Então existem uma vizinhança $V \subset M$ de p, uma vizinhança $\widetilde{V} \subset \widetilde{M}$ de $\tilde{p}$, e uma isometria $f\colon V \to \widetilde{V}$ tal que $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$.*

Demonstração: Escolha a isometria i do teorema de modo que $i(e_j) = \tilde{e}_j$. A condição sobre a curvatura é imediatamente verificada, e a conclusão segue do teorema.

2.3 Corolário. *Seja M um espaço de curvatura constante e sejam p e q dois pontos quaisquer de M. Sejam $\{e_j\}$ e $\{f_j\}$ bases ortonormais arbitrárias de $T_p(M)$ e $T_q(M)$, respectivamente. Então existem vizinhanças U de p e V de q, e uma isometria $g\colon U \to V$ tal que $dg_p(e_j) = f_j$.*

Relacionado com o problema acima, existe o problema de saber se um difeomorfismo $f\colon M \to \widetilde{M}$ que preserva a curvatura no sentido que

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle_p = \left\langle \widetilde{R}(df_p(X),df_p(Y))df_p(Z),df_p(T)\right\rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e todo $X,Y,Z,T \in T_p(M)$, é uma isometria. Em dimensão dois isto seria uma espécie de recíproca do Teorema Egregium de Gauss, e é falso, mesmo no caso compacto, como mostra o exemplo da Fig. 1. (Um exemplo não trivial para o caso não compacto pode ser encontrado em M. do Carmo [dC 2], pg. 237.) Para $n = \dim M = \dim \widetilde{M} \geq 4$, o problema admite surpreendentemente uma solução afirmativa (v. Kulkarni, [Ku 1] e [Ku 2]).

Explicitamente, o resultado de Kulkarni afirma que se M^n e $\widetilde{M}^n$ são analíticas (isto é, as mudanças de coordenadas são funções analíticas), $n \geq 4$, e $f\colon M^n \to \widetilde{M}^n$ preserva curvaturas, então ou M tem curvatura seccional constante ou f é uma isometria . Se M e $\widetilde{M}$ são meramente C^∞, é necessário supor, em adição, que o conjunto dos pontos não-isotrópicos é denso em M (um ponto $p \in M$ é *isotrópico* se a curvatura seccional $K(\sigma,p)$ em p não depende de σ; cf. o teorema de Schur, exercício 8, Cap. IV). Para $n = 3$, o problema foi tratado por Yau [Ya].

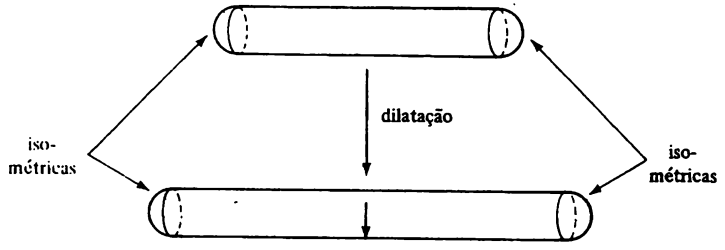


Figura 1. *Um difeomorfismo que preserva curvatura e não é uma isometria.*

3 O espaço hiperbólico

Daremos agora um exemplo de um espaço de curvatura constante -1.

Considere o semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$$

e introduza em H^n a métrica

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}\,. \tag{1}$$

É claro que H^n é simplesmente conexo. Vamos mostrar que H^n com a métrica (1) tem curvatura seccional constante igual a -1, e que H^n é completo. H^n é chamado o *espaço hiperbólico* de dimensão n.

Iniciaremos com o cálculo da curvatura de H^n. Uma boa parte do cálculo pode ser feita na situação mais geral seguinte: duas métricas $\langle\,,\,\rangle$ e $\langle\langle\,,\,\rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são *conformes* se existe uma função diferenciável $f\colon M \to \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p(M)$ se tenha

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\langle\langle u, v\rangle\rangle_p\,.$$

Por exemplo, a métrica (1) de H^n é conforme à métrica usual do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Consideremos em H^n a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}\,,$$

onde F é uma função positiva diferenciável em H_n; tal métrica é conforme à métrica usual de $\mathbb{R}^n$. Escreveremos $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$ para indicar a matriz inversa de g_{ij}, e faremos $\log F = f$. Nestas condições, indicando $\frac{\partial}{\partial x_j} f = f_j$, temos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik}\,\frac{2}{F^3}\,F_j = -2\,\frac{\delta_{ik}}{F^2}\,f_j\,.$$

Para o cálculo dos símbolos de Christoffel, observemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{mk} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} F^2 \\ &= -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ij} f_k \,,\end{aligned}$$

donde concluimos que se os três índices são distintos, $\Gamma_{ij}^k = 0$, e se dois índices são iguais, temos

$$\Gamma_{ij}^i = -f_j \,, \quad \Gamma_{ii}^j = f_j \,, \quad \Gamma_{ij}^j = -f_i \,, \quad \Gamma_{ii}^i = -f_i \,.$$

Para o cálculo dos coeficientes da curvatura, observemos que

$$\begin{aligned}R_{ijij} &= \sum_\ell R_{iji\ell} g_{\ell j} = R_{iji}^j g_{jj} = R_{iji}^j \frac{1}{F_2} \\ &= \frac{1}{F^2}\left\{ \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell \Gamma_{j\ell}^j - \sum_\ell \Gamma_{ji}^\ell \Gamma_{i\ell}^j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j \right\}.\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ii}^j = f_{jj}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{ji}^j = -f_{ii}$, teremos

$$\begin{aligned}F^2 R_{ijij} &= -\sum_{\substack{\ell \\ \ell\neq i, \ell\neq j}} f_\ell f_\ell + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \\ &= -\sum_\ell f_\ell^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \,.\end{aligned}$$

Além disto, $R_{ijk\ell} = 0$ se os quatro índices são distintos, e se três índices são distintos, temos

$$(2) \qquad R_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj} \,, \quad R_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki} \,, \quad R_{ijk}^k = 0.$$

Finalmente, a curvatura seccional no plano gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ é (observe que $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ são ortogonais)

$$\begin{aligned}K_{ij} &= \frac{R_{ijij}}{g_{ii} g_{jj}} = R_{ijij} F^4 \\ &= -\left(-\sum_\ell f_\ell^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) F^2.\end{aligned}$$

Vamos agora particularizar para o caso $F^2 = x_n^2$, o que implica $f = \log x_n$. Neste caso, se $i \neq n$ e $j \neq n$, teremos

$$K_{ij} = \left(-\frac{1}{x_n^2}\right) x_n^2 = -1;$$

se $i = n$, $j \neq n$, teremos

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = -\frac{1}{x_n^2}\, x_n^2 = -1;$$

finalmente, se $i \neq j$, $j = n$, teremos ainda $K_{in} = -1$. Usando as expressões em (2) e o Corolário 3.5 do Capítulo IV, concluimos que a curvatura seccional de H^n é constane e igual a -1.

Para provar que H^n é completo, utilizaremos o seguinte fato.

3.1 Proposição. *As retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$, e os círculos de H^n cujos planos são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano são geodésicas de H^n.*

Demonstração: Observe que uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que só envolve as variáveis $x_1, \ldots, x_{n-1}$ não altera a métrica g_{ij} e é, portanto, uma isometria de H^n. Decorre daí que basta considerar retas e círculos no plano $x_1 x_n$. O resultado segue agora do Exemplo 3.10 do Capítulo III. □

É imediato verificar, pelo teorema de existência e unicidade de geodésicas, que todas as geodésicas de H^n são do tipo descrito na Proposição 3.1. Isto implica que todas as geodésicas de H^n estão contidas em planos perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$. Como tais planos são evidentemente isométricos ao plano hiperbólico, o fato de H^n ser completo é uma conseqüência de ser o plano hiperbólico completo (Cf. Exercício 10, do Cap. VII).

Um outro modelo do espaço hiperbólico é descrito no Exercício 3 deste capítulo.

4 As formas espaciais

Agora podemos provar o resultado principal deste capítulo. Como sempre, M^n indicará uma variedade de dimensão n.

4.1 Teorema. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante K. Então o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M, com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

a) H^n, *se* $K = -1$,

b) $\mathbb{R}^n$, *se* $K = 0$,

c) S^n, *se* $K = 1$.

Na demonstração, faremos uso do seguinte lema que é interessante em si mesmo.

4.2 Lema. *Sejam $f_i\colon M \to N$, $i = 1, 2$, duas isometrias locais da variedade Riemanniana (conexa) M na variedade Riemanniana N. Suponhamos que existe um ponto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ e $(df_1)_p = (df_2)_p$. Então $f_1 = f_2$.*

Demonstração do Lema: Seja V uma vizinhança normal de p tal que as restrições $f_1|V$ e $f_2|V$ sejam difeomorfismos. Seja $\varphi = f_1^{-1} \circ f_2\colon V \to V$. Então $\varphi(p) = p$ e $d\varphi_p$ é a identidade. Se $q \in V$, existe um único $v \in T_pM$ com $\exp_p(v) = q$. Decorre daí que $\varphi(q) = q$, donde $f_1 = f_2$ em V. Como M é conexa, qualquer ponto $r \in M$ pode ser ligado a p por um caminho $\alpha\colon [0,1] \to M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = r$. Seja

$$A = \{t \in [0,1]; f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t)) \text{ e } (df_1)_{\alpha(t)} = (df_2)_{\alpha(t)}\}.$$

Pelo que foi visto, $\sup A \neq 0$. Se $\sup A = t_0 \neq 1$, repetiremos o argumento acima para o ponto $\alpha(t_0)$, obtendo uma contradição. Portanto $\sup A = 1$, donde $f_1(r) = f_2(r)$, para todo $r \in M$. □

Demonstração do Teorema 4.1: $\widetilde{M}$ é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante K. Consideremos em primeiro lugar os casos (a) e (b) e indiquemos, por conveniência, tanto H^n quanto $\mathbb{R}^n$ por Δ. Fixemos pontos $p \in \Delta$, $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ e uma isometria linear $i\colon T_p(\Delta) \to T_{\tilde{p}}(\widetilde{M})$; Consideremos a aplicação:

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ\, i \, \exp_p^{-1}\colon \Delta \to \widetilde{M}.$$

Como Δ e $\widetilde{M}$ são completas com curvaturas seccionais não positivas, f está bem definida. Pelo Teorema de Cartan, f é uma isometria local. Pelo Teorema de Hadamard, $\exp_p$ e $\exp_{\tilde{p}}$ são difeomorfismos, logo f é um difeomorfismo, e isto prova (a) e (b).

Para o caso (c), fixemos novamente pontos $p \in S^n$, $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ e uma isometria linear $i\colon T_p(S^n) \to T_{\tilde{p}}(\widetilde{M})$. Seja $q \in S^n$ o ponto antípoda de p e definamos

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}\colon S^n - \{q\} \to \widetilde{M}.$$

Pelo Teorema de Cartan, f é uma isometria local. Escolhamos agora um ponto $p' \in S^n$; $p' \neq p$, $p' \neq q$. Façamos $\tilde{p}' = f(p')$, $i' = df_{p'}$ e definamos

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1}\colon S^n - \{q'\} \to \widetilde{M},$$

onde q' é o ponto antípoda de p'.

Observe que $S^n - (\{q\} \cup \{q'\}) = W$ é conexo, $p' \in W$, e

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p'), \quad df_{p'} = i' = df'_{p'}.$$

Segue-se do Lema 4.2, que $f = f'$ em W. Por conseguinte, podemos definir uma aplicação $g\colon S^n \to \widetilde{M}$ por

$$g(r) = \begin{cases} f(r), & \text{se } r \in S^n - \{q\} \\ f'(r), & \text{se } r \in S^n - \{q'\}. \end{cases}$$

É claro que g é uma isometria local, logo um difeomorfismo local. Pela compacidade de S^n, g é uma aplicação de recobrimento, e como $\widetilde{M}$ é simplesmente conexa, g é um difeomorfismo (v. M. do Carmo [dC 2] §5.6). Logo g é uma isometria. □

As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas *formas espaciais*. O teorema anterior reduz a determinação de todas as formas espaciais a um problema da teoria de grupos, como mostraremos a seguir. Precisamos de alguns fatos sobre espaços de recobrimento e ações de grupos.

Diremos que um grupo G *opera* (à esquerda) em um conjunto M se existe uma aplicação de $G \times M$ em M, indicada por

$$G \times M \ni (g, x) \to gx \in M$$

tal que

$$ex = x, \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

onde $e =$ identidade de G, $x \in M$ e $g_1, g_2 \in G$. Diz-se que G opera *livremente* (i.e., sem pontos fixos) em M se $gx = x$ implica $g = e$. A *órbita* de um ponto $x \in M$ é o conjunto

$$Gx = \{gx; g \in G\}.$$

A ação de G é *transitiva* se $Gx = M$. O conjunto de todas as órbitas é indicado por M/G; existe uma projeção natural $\pi\colon M \to M/G$ dada por $\pi(x) = Gx$. Quando M tem alguma estrutura adicional (topológica, diferenciável, etc.), é conveniente considerar G como um grupo de isomorfismos (homeomorfismos, difeomorfismos, etc.) da estrutura considerada.

Se M é um espaço topológico, dizemos que um grupo G (de homeomorfismos de M) *opera de modo propriamente descontínuo* se todo $x \in M$ possui uma vizinhança U tal que $g(U) \cap U = \varnothing$, para todo $g \in G$, $g \neq e$. Neste caso, a projeção $\pi\colon M \to M/G$ (onde M/G tem a topologia quociente) é uma aplicação de recobrimento regular e G é o grupo das transformações de recobrimento (V. Massey [Ma], Prop. 8.2, pg. 165).

Suponha agora que M é uma variedade Riemanniana e seja Γ um subgrupo do grupo das isometrias de M que opera de modo propriamente descontínuo. Já sabemos que M/Γ tem uma estrutura de variedade diferenciável na qual $\pi\colon M \to M/\Gamma$ é um difeomorfismo local (V. Cap. 0, Exemplo 4.8). Podemos, além disto, dar a M/Γ uma métrica Riemanniana de modo que π seja uma isometria local. Com efeito, dado $p \in M/\Gamma$, escolhemos $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$; para todo par $u, v \in T_p(M/\Gamma)$, definimos

$$\langle u, v \rangle = \langle d\pi^{-1}(u), d\pi^{-1}(v) \rangle_{\tilde{p}}.$$

Como o recobrimento π é regular, Γ é transitivo em $\pi^{-1}(p)$ (V. Massey [Ma], Lema 8.1, pg. 164). Logo, dado qualquer $\tilde{q} \in \pi^{-1}(p)$, existe $\gamma \in \Gamma$ com $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$, e a definição acima não depende da escolha do $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. É claro que com tal métrica $\pi\colon M \to M/\Gamma$ é uma isometria local; tal métrica será chamada a *métrica em M/Γ induzida pelo recobrimento π*. Observe que M/Γ é completa se e só se M é completa e que M/Γ tem curvatura constante se e só se M tem curvatura constante. Tomando $M = S^n$ ou $\mathbb{R}^n$ ou H^n, concluimos que M/Γ é uma variedade completa de curvatura constante 1 (se $M = S^n$), 0 (se $M = \mathbb{R}^n$). Vamos mostrar que desta maneira obteremos todas estas variedades.

4.3 Proposição. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante K $(1, 0, -1)$. Então M é isométrica a $\widetilde{M}/\Gamma$, onde $\widetilde{M}$ é S^n (se $K = 1$), $\mathbb{R}^n$, (se $K = 0$) ou H^n (se $K = -1$), Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de $\widetilde{M}$ que opera de modo propriamente descontínuo em $\widetilde{M}$, e a métrica de $\widetilde{M}/\Gamma$ é a induzida pelo recobrimento $\pi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\Gamma$.*

Demonstração: Considere o recobrimento universal $p\colon \widetilde{M} \to M$, e tome em $\widetilde{M}$ a métrica do recobrimento, isto é, a métrica tal que p seja uma isometria local. Seja Γ o grupo das transformações de recobrimento de p. Então Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de $\widetilde{M}$ e opera de maneira propriamente descontínua em $\widetilde{M}$. Logo é possível introduzir em $\widetilde{M}/\Gamma$ a métrica Riemanniana induzida por $\pi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\Gamma$. Como o recobrimento p é regular, temos que se $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$ então $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ se e só se $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$ o que ocorre se e só se $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$. As classes de equivalência dadas por p e π em $\widetilde{M}$ são, portanto, as mesmas, o que induz uma bijeção $\xi\colon M \to \widetilde{M}/\Gamma$ tal que $\pi = \xi \circ p$. Como π e p são isometrias locais, ξ também o é, e, sendo uma bijeção, é uma isometria de M sobre $\widetilde{M}/\Gamma$. □

A proposição anterior reduz o problema de achar todas as formas espaciais ao problema de determinar todos os subgrupos que operam de modo propriamente descontínuo do grupo das

isometrias de cada um dos modelos simplesmente conexos (S^n, H^n e $\mathbb{R}^n$).

A determinação de tais subgrupos é um problema difícil. O problema esférico ($\widetilde{M} = S^n$) foi solucionado só na década de 60, e o leitor interessado achará uma exposção em Wolf, J., "Spaces of Constant Curvature", Mc-Graw Hill, 1967 (Capítulo 4-7). Este livro contém também um estudo bastante completo do que é conhecido em problemas correlatos (Cf. a 2ª edição, publicada por Publish or Perish). Aqui só mencionaremos dois fatos interessantes.

4.4 Proposição. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão par $n = 2m$, com curvatura seccional constante $K = 1$. Então M^n é isométrica ou à esfera S^n ou ao espaço projetivo real P^n da mesma dimensão.*

Demonstração: O grupo ortogonal $0(2m+1)$ é o grupo (transitivo) de isometrias de S^n. Seja Γ um subgrupo que opera de modo propriamente descontínuo sobre S^n. Se $\gamma \in \Gamma$ tem determinante $+1$, existe um valor próprio de γ igual a 1. Então γ tem um ponto fixo, o que implica $\gamma = e$. Se $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tem determinante -1, então $\tilde{\gamma}^2$ tem determinante 1, logo $\tilde{\gamma}^2 = e$. Por conseguinte, os valores próprios de $\tilde{\gamma}$ são 1 ou -1. Se 1 é um valor próprio de $\tilde{\gamma}$, então $\tilde{\gamma} = e$, o que contradiz o fato de ser $\det \tilde{\gamma} = -1$. Assim $\tilde{\gamma} = -e$, donde, $\Gamma = \{e, -e\}$. Usando agora a Proposição 4.3 obtemos que M^n é ou S^n, se $\Gamma = \{e\}$, ou P^n, se $\Gamma = \{e, -e\}$. □

4.5 Proposição. *Toda superfície compacta, orientável de gênero $p > 1$ pode ser munida de uma métrica de curvatura constante negativa.*

Demonstração: Tomemos no plano hiperbólico H^2 um polígono geodésico fechado P com $4p$ lados de iguais comprimentos. Por um processo bem conhecido de identificação de lados, P pode ser identificado a uma variedade topológica bi-dimensional M^2 (Ver Massey [Ma], Cap. 1). Seja Γ o subgrupo das isometrias de H^2 gerado pelas isometrias que identificam os lados de P. É possível mostrar que os transformados de P por Γ "enchem H^2 sem vazios"se e somente se a soma α dos ângulos internos dos

vértices de P for igual a 2π (para uma prova simples. v. Roger Fenn, "What is the geometry of a surface?", American Math. Monthly, Feb. 1983); neste caso, $M^2 = H^2/\Gamma$ tem uma métrica de curvatura constante igual a -1. Afirmamos que é possível achar um polígono P que satisfaz à condição $\alpha = 2\pi$, o que concluirá a demonstração da proposição.

Para provar o pedido, observe-se que pelo Teorema de Gauss-Bonnet (v. M. do Carmo [dC 2], pg. 274), conclui-se que

$$\alpha = -A + 2\pi(1p - 1),$$

onde A é a área de P na métrica hiperbólica. Portanto, por um lado, se o polígono P é arbitrariamente pequeno, α é arbitrariamente próximo de $2\pi\,(2p - 1)$. Por outro lado, podemos aumentar a área A do polígono P de tal forma que α seja arbitrariamente pequeno. Decorre daí que deformando continuamente P, existe um polígono geodésico tal que $\alpha = 2\pi$. □

Os espaços de curvatura constante tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico da Geometria Riemanniana, devido às suas relações com a Geometria não-euclidiana. Uma geometria não-euclidiana é uma variedade Riemanniana completa M junto com um grupo transitivo de isometrias G (os movimentos não euclidianos) que satisfazem ao *Axioma de Mobilidade livre: Sejam* $p, \tilde{p} \in M$, γ_1, γ_2 *geodésicas de* M *que começam em* p *e formam um ângulo* α *em* p, *e* $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ *geodésicas com origem em* $\tilde{p}$ *e formando um ângulo* α *em* $\tilde{p}$. *Então existe* $g \in G$, *com* $g(p) = \tilde{p}$, $g(\gamma_1) = \tilde{\gamma}_1$, $g(\gamma_2) = \tilde{\gamma}_2$. Isto corresponde à "igualdade de triângulos" na geometria euclidiana, e implica evidentemente que M tem curvatura seccional constante. Segue-se que os espaços da Geometria não-euclidiana são encontrados entre as formas espaciais. Daí a importância dada à determinação das formas espaciais. Os casos de S^n, P^n e H^n são chamados geometria *esférica, elíptica* e *hiperbólica* respectivamente.

5 Isometrias do espaço hiperbólico; o teorema de Liouville

As isometrias do espaço hiperbólico estão estreitamente relacionadas com as transformações conformes do $\mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamada *conforme* se os ângulos (não orientados) de curvas que se cortam são preservados, isto é, se o ângulo (não orientado) de dois vetores quaisquer v_1 e v_2 em $p \in U$ é igual ao ângulo de $df_p(v_1)$ com $df_p(v_2)$. O principal objetivo desta Seção é mostrar que as isometrias do semi-espaço superior $H^n \subset \mathbb{R}^n$ com a métrica $\frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ (cf. Seção 2) são as restrições a H^n das transformações conformes de $\mathbb{R}^n$ que aplicam H^n sobre H^n. Para demonstrar este resultado, precisamos descrever as transformações conformes do $\mathbb{R}^n$.

Para o caso de $\mathbb{R}^2$, que identificamos com o plano complexo C, é bem conhecido que as transformações conformes são as funções holomorfas ou antiholomorfas (antiholomorfa quer dizer que a função complexa conjugada é holomorfa) com derivadas não nulas. Neste caso, o teorema da aplicação conforme de Riemann garante que dados dois abertos próprios e simplesmente conexos do plano, existe uma aplicação conforme levando um no outro.

Para o caso do $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, a situação é radicalmente diferente, e o fato de ser f uma transformação conforme impõe fortes restrições sobre f. Este é o conteúdo do Teorema de Liouville abaixo, para o qual precisamos de algumas considerações.

Primeiro, observe que uma condição necessária e suficiente para que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja conforme é que para todo $p \in U$ e todo par de vetores v_1, v_2 em p se tenha:

$$\langle df_p(v_1), df_p(v_2)\rangle = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle, \quad \lambda^2 \neq 0. \tag{3}$$

Com efeito, se (3) é satisfeita, $|df_p(v)|^2 = \lambda^2|v|^2$, para todo vetor v em p, donde

$$\cos \sphericalangle (df_p(v_1), df_p(v_2)) = \cos \sphericalangle (v_1, v_2), \tag{4}$$

isto é, os ângulos (não orientados) são preservados. Reciprocamente, (4) implica que df_p leva um triângulo com vértice em p em um triângulo semelhante com vértice em $f(p)$. Logo $|df_p(v)|^2 = \lambda^2|v|^2$, para todo v em p; aplicando esta última relação a uma soma $u + v$ de vetores, obteremos (3).

A função positiva $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ definida em (3) será chamada o *coeficiente de conformalidade* de f.

5.1 Exemplos. É claro que uma isometria de $\mathbb{R}^n$ (transformação linear ortogonal seguida de uma translação) é uma transformação conforme do $\mathbb{R}^n$ com coeficiente de conformalidade $\lambda \equiv 1$. A transformação linear $f(p) = \lambda I(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, onde I é a matriz identidade e $\lambda = \text{const.} > 0$, é evidentemente uma transformação conforme com coeficiente de conformalidade λ; f é chamada uma *dilatação*. Como último exemplo, vamos mostrar que a *inversão* em $p_0 \in \mathbb{R}^n$, definida por

$$f(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0\,, \quad p \in \mathbb{R}^n - \{p_0\}, \tag{5}$$

é uma transformação conforme.

Geometricamente, f leva $p \in \mathbb{R}^n - \{p_0\}$ em um ponto $f(p)$ que está na reta que une p a p_0, a uma distância $|f(p) - p_0| = \frac{1}{|p-p_0|}$ de p_0. Portanto f deixa fixa a esfera de raio 1 em torno de p_0, e permuta entre si as regiões interior e exterior a tal esfera; em particular, $f^2 =$ identidade.

Para ver que f é conforme, observe que, se v é um vetor em p,

$$df_p(v) = \frac{v|p - p_0|^2 - 2\langle v, p - p_0\rangle(p - p_0)}{|p - p_0|^4}\,,$$

logo

$$\begin{aligned} |df_p(v)|^2 &= \frac{\langle v, v\rangle}{|p - p_0|^4} + \frac{(4\langle v, p - p_0\rangle^2 - 4\langle v, p - p_0\rangle^2)|p - p_0|^2}{|p - p_0|^8} \\ &= \frac{\langle v, v\rangle}{|p - p_0|^4}\,, \end{aligned}$$

isto é, a inversão (5) é uma transformação conforme com coeficiente de conformalidade $\lambda = \frac{1}{|p-p_0|^2}$.

O Teorema de Liouville afirma o fato surpreendente que toda transformação conforme f de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, se estende a uma composição de isometrias, dilatações e inversões. O resultado é, em verdade, um pouco mais preciso e afirma que f é composta, no máximo, de uma isometria, uma dilatação e uma inversão.

A prova que apresentamos abaixo se encontra, a menos de notações e detalhes, no livro de Dubrovin, Novikok e Fomenko, Géometrie Contemporaine, Méthodes et Applications, 1re partie, Traduction française, Ed. Mir, Moscou, 1982, pp. 140-143; nenhum elemento desta demonstração será usado no resto do livro, e o leitor ansioso por aplicações poderá omití-la em uma primeira leitura.

5.2 Teorema (de Liouville). *Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma transformação conforme de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então f é a restrição a U de uma composição de isometrias, dilatações e inversões, no máximo uma de cada.*

Demonstração: Seja $a_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas cartesianas do $\mathbb{R}^n$ relativas a esta base. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ campos de vetores diferenciáveis em U, de modo que em cada ponto de U, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Se λ é o coeficiente de conformalidade de f, podemos escrever

$$\langle df(e_i), df(e_k) \rangle = \lambda^2 \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Seja d^2 a diferencial segunda de f; isto é, $d^2 f = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação bilinear, simétrica, com valores no $\mathbb{R}^n$ e tal que, na base canônica, $d^2 f(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Tomando índices i, j, k distintos e derivando (6), obteremos:

$$\begin{aligned}
\langle d^2 f(e_i, e_j), df(e_k) \rangle + \langle df(e_i), d^2 f(e_k, e_j) \rangle &= 0, \\
\langle d^2 f(e_j, e_k), df(e_i) \rangle + \langle df(e_j), d^2 f(e_i, e_k) \rangle &= 0, \\
\langle d^2 f(e_k, e_i), df(e_j) \rangle + \langle df(e_k), d^2 f(e_j, e_i) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Somando as duas primeiras equações acima e subtraindo a terceira, teremos

$$\langle d^2 f(e_k, e_j), df(e_i)\rangle = 0, \quad \text{se } i, j, k \text{ são distintos.}$$

Fixando k, j e fazendo i variar nos $(n-2)$ índices restantes, concluimos que $d^2 f(e_k, e_j)$ pertence ao plano gerado por $df(e_j)$ e $df(e_k)$. Portanto,

$$d^2 f(e_k, e_j) = \mu\, df(e_k) + \nu\, df(e_j),$$

onde, como $\langle df(e_k), df(e_k)\rangle = \langle df(e_j) df(e_j)\rangle = \lambda^2$,

$$\mu = \frac{\langle d^2 f(e_k, e_j), df(e_k)\rangle}{\lambda^2} = \frac{\lambda d\lambda(e_j)}{\lambda^2} = \frac{d\lambda(e_j)}{\lambda},$$
$$\nu = \frac{d\lambda(e_k)}{\lambda},$$

isto é,

$$d^2 f(e_k, e_j) = \frac{1}{\lambda}\,(df(e_k) d\lambda(e_j) + df(e_j) d\lambda(e_k)). \tag{7}$$

Será conveniente, no que se segue, fazer $\rho = \frac{1}{\lambda}\cdot$ Vamos calcular a diferencial segunda $d^2(\rho f)$. Como $d(\rho f) = d\rho f + \rho df$, obteremos, usando (7),

$$\begin{aligned} d^2(\rho f)(e_k, e_j) &= d^2\rho(e_k, e_j) + \rho d^2 f(e_k, e_j) + d\rho(e_k) df(e_j) \\ &\quad + d\rho(e_j) df(e_k) = d^2\rho(e_k, e_j) f + \frac{1}{\lambda}\, d^2 f(e_k, e_j) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2}\,\{d\lambda(e_k) df(e_j) + d\lambda(e_j) df(e_k)\} = d^2\rho(e_k, e_j) f. \end{aligned} \tag{8}$$

Afirmo que $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$, para $k \neq j$. Para ver isto, calcule a diferencial terceira $d^3(\rho f)$, isto é, a aplicação trilinear, simétrica, $d^3(\rho f)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$ e tal que, na base canônica, $d^3(\rho f)(a_i, a_j, a_k) = \frac{\partial^3(\rho f)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\cdot$ Usando (8), obteremos

$$d^3(\rho f)(e_k, e_j, e_i) = d^3\rho(e_k, e_j, e_i) f + d^2\rho(e_k, e_j) df(e_i).$$

Na expressão acima, o primeiro membro e a primeira parcela do segundo membro são simétricos nos três índices i, j, k. Logo, o mesmo ocorre com a segunda parcela do segundo membro. Conclui-se que

$$d^2\rho(e_k, e_j)df(e_i) = d^2\rho(e_k, e_i)df(e_j).$$

Como $df(e_i)$ e $df(e_j)$ são linearmente independentes e i, j, k são índices distintos, porém arbitrários, obtém-se que $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$, para todo $j \neq k$, como havíamos afirmado.

Observe agora que, fixando $p \in U$, podemos escolher os campos $e_1, \ldots, e_n$ de modo que eles formem uma base ortonormal previamente dada em p. Portanto a relação $d^2\rho(e_k, e_j) = 0$ é válida em p para toda base ortonormal em p e, como p é arbitrário, o mesmo se passa em U. Como $d^2\rho$ é uma forma bilinear simétrica e

$$0 = d^2\rho\left(\frac{e_j + e_k}{\sqrt{2}}, \frac{e_j - e_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\{d^2\rho(e_j, e_j) - d^2\rho(e_k, e_k)\},$$

concluimos que $d^2\rho(e_j, e_j) = d^2\rho(e_k, e_k)$, para todo $j \neq k$.

Em resumo, para todo $p \in U$ e toda base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ em p, temos que $d^2\rho(e_j, e_k) = \sigma\delta_{jk}$. Tomando, em particular, a base canônica, temos

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma\delta_{ij}\,. \tag{9}$$

Calculando a derivada de ambos os membros de (9), concluimos que $(i \neq j)$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = 0,$$

isto é, $\sigma = \text{const.}$

Vamos primeiro considerar o caso $\sigma = \text{const.} \neq 0$ e mostrar que a Eq. (9) implica que

$$\rho = \frac{\sigma}{2}\sum x_i^2 + \sigma\sum b_i x_i + c, \quad b_i \text{ e } c \text{ constantes.} \tag{10}$$

Com efeito, de $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \sigma$ conclui-se que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \sigma x_i + \sigma b_i \,,$$

onde b_i é uma função que não depende de x_i ; como $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, b_i também não depende de x_j , $j \neq i$. Portanto b_i é uma constante, e

$$\rho = \frac{1}{2}\sigma x_i^2 + \sigma b_i x_i + \varphi_i \,,$$

onde φ_i não depende de x_i . Como $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $j \neq i$, concluimos que

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\sigma x_j^2 + \sigma b_j x_j + \varphi_{ij} \,,$$

onde φ_{ij} não depende de x_i e de x_j . Prosseguindo indutivamente, obtém-se (10), como havíamos afirmado.

Portanto, se $\sigma \neq 0$, podemos escrever (10) na forma

$$\frac{1}{\lambda} = \rho = a_1 |p - p_0|^2 + k_1 \,, \quad a_1 = \frac{\sigma}{2} \quad \text{e} \quad k_1 = \text{ const.}, \, p_0 \in \mathbb{R}^n.$$

A prova estará terminada, para o caso $\sigma \neq 0$, se mostrarmos que $k_1 = 0$. Pois considerando a inversão $g\colon U \to \mathbb{R}^n$:

$$g(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0 \,,$$

e tomando a composta $h = g \circ f^{-1}$, teremos que h é uma transformação conforme cujo coeficiente de conformalidade é

$$a_1 |p - p_0|^2 \, \frac{1}{|p - p_0|^2} = a_1 \,.$$

Portanto, h é uma isometria seguida de uma dilatação, donde $f = h^{-1} \circ g$ é uma inversão seguida de uma dilatação, seguida de uma isometria.

Vamos agora provar que $k_1 = 0$. Observe que aplicando a f^{-1} o argumento inicial, obteremos

$$\lambda = a_2 |f(p) - q_0|^2 + k_2 \,, \quad a_2 \text{ e } k_2 \text{ consts.},$$

donde

$$(11) \qquad (a_1|p-p_0|^2+k_1)(a_2|f(p)-q_0|^2+k_2)=1.$$

A Eq. (11) mostra que (a intersecção com U de) uma esfera de centro p_0 é levada por f em uma esfera de centro q_0. Como f preserva ângulos, os raios da primeira esfera são levados em raios da segunda. Seja $p(s)$, $0 \leq s \leq s_0$, um segmento de raio da primeira esfera contido em U, onde s é o comprimento de arco, e seja $f \circ p(s)$ a sua imagem. O comprimento do segmento imagem é dado por

$$\begin{aligned}\int_0^{s_0} \left| df\left(\frac{dp}{ds}\right)\right| ds &= \int_0^{s_0} \frac{ds}{a_1|p(s)-p_0|^2+k_1} \\ &= |f(p(s_0))-f(p(0))|.\end{aligned}$$

Se $k_1 \neq 0$, $|f(p(s_0))-f(p(0))|$ é uma função transcendente de $|p(s_0)-p_0|$. Por outro lado, a Eq. (11)implica que tal função é algébrica. Esta contradição mostra que $k_1=0$.

Resta considerar o caso $\sigma=0$. Nesta situação,

$$\rho=\frac{1}{\lambda}=\sum a_i x_i + c_1 = A_1(x)+c_1\,, \quad c_1 = \text{ const.},$$

onde escrevemos, por conveniência, $\sum a_i x_i = A_1(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Da mesma maneira que anteriormente, aplicando o argumento inicial a f^{-1}, obtemos

$$(11') \qquad (A_1(x)+c_1)(A_2(f(x))+c_2)=1.$$

A Eq. (11') mostra que (a intersecção com U de) um hiperplano paralelo a $A_1=0$ é levado por f em um hiperplano paralelo a $A_2=0$. Como f preserva ângulos, uma reta perpendicular ao hiperplano $A_1=0$ é levada por f em uma reta (perpendicular ao hiperplano $A_2=0$). Considerando um segmento $p(s)$, $0 \leq s \leq s_0$, de uma tal reta, parametrizada pelo comprimento de arco s, obteremos, de maneira análoga à anterior, que

$$|f(p(s_0))-f(p(0))| = \int_0^{s_0} \frac{ds}{A_1(p(s))+c_1}\,.$$

A expressão acima contradiz (11'), a não ser que a expressão linear $A_1(p(s))$ seja nula.

Conclui-se que se $\sigma = 0$, $\lambda = \text{const.}$. Neste caso, os comprimentos dos vetores tangentes ficam multiplicados pela constante λ e, como é imediato verificar, f é uma isometria, seguida de uma dilatação. Isto conclui o caso $\sigma = 0$ e a demonstração do Teorema de Liouville. □

Podemos agora descrever as isometrias do espaço hiperbólico no modelo do semi-espaço superior $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_n > 0\}$ com a métrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$.

5.3 Teorema. *As isometrias de H^n são as restrições a $H^n \subset \mathbb{R}^n$ das transformações conformes de $\mathbb{R}^n$ que levam H^n sobre si mesmo.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente $n \geq 3$. Seja $f: H^n \to H^n$ uma isometria na mérica g_{ij}. Então f se estende a uma aplicação conforme de $\mathbb{R}^n$ com a métrica δ_{ij}. Como H^n é completa na métrica g_{ij}, f aplica H^n sobre H^n.

Reciprocamente, seja $f: H^n \subset \mathbb{R}^n \to H^n$ uma transformação conforme de H^n sobre H^n e seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortonormal, na métrica g_{ij}, em um ponto $p \in H^n$. Como $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ e f é conforme, existe um $\lambda^2 > 0$ tal que $\langle df_p(e_i), df_p(e_j)\rangle = \lambda^2 \delta_{ij}$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno na métrica g_{ij}. Portanto, a base $\left\{\frac{df_p(e_i)}{\lambda}\right\}$ é ortonormal em $f(p)$, e pelo Corolário 2.3 do Teorema de Cartan, existe uma isometria g de H^n levando p em $f(p)$, com $dg(e_i) = \frac{df(e_i)}{\lambda}$. Pelo que foi demonstrado na primeira parte, g é conforme. Logo $h = g^{-1} \circ f$ é a restrição a H^n de uma aplicação conforme do $\mathbb{R}^n$ que leva H^n sobre H^n, deixa p fixo e satisfaz $dh_p = \lambda I$.

A demonstração estará concluida se mostrarmos que $h =$ identidade. Em outras palavras, precisamos mostrar que se uma aplicação conforme h de $\mathbb{R}^n$ leva H^n sobre H^n, deixa fixo um ponto $p \in H^n$ e satisfaz $dh_p =$ múltiplo da ident., então h é a identidade.

Para ver isto, seja P um hiperplano passando por p. Pelo teorema de Liouville, $h(P)$ é um hiperplano ou uma esfera pas-

sando por p. Como h leva o bordo ∂H de H^n em si próprio, e h é conforme, o ângulo de P com ∂H é o mesmo que o ângulo de $h(P)$ com ∂H.

Afirmamos que $h(P) = P$. Para ver isto, considere uma reta r_1 passando por p e perpendicular a ∂H, e seja $q_1 = r_1 \cap \partial H$. A imagem $h(r_1)$ de r_1 é um círculo ou uma reta, e faz com ∂H o mesmo ângulo que r_1. Como dh_p é um múltiplo da identidade, $h(r_1)$ é tangente a r_1 em p e, portanto, $h(r_1) = r_1$. Logo $h(q_1) = q_1$. Isto mostra que se P é perpendicular a ∂H, então $h(P) = P$. Se P não é perpendicular a ∂H, seja r uma reta contida em P. De novo, $h(r)$ é um círculo ou uma reta. Para que $h(r)$ seja um círculo, fazendo com ∂H o mesmo ângulo α que faz r com ∂H, é necessário que $q_1 \in h(r)$ (v. Fig. 2 e observe que o ângulo de pq_1 com ∂H é $\pi/2$), o que contradiz o fato que $h(q_1) = q_1$. Logo $h(r)$ é uma reta, $h(r) = r$, e como r é uma reta arbitrária em P, $h(P) = P$, como havíamos afirmado.

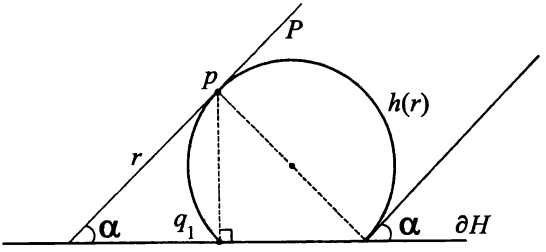


Figura 2

Segue-se daí que h não pode ser uma inversão (pois a imagem de algum plano seria uma esfera) ou uma isometria distinta da identidade. Pelo Teorema de Liouville, h é uma dilatação. Como h leva H^n sobre H^n, h é a identidade.

Para $n = 2$, o argumento acima não se aplica. Entretanto, um cálculo simples (cf. Exercício 4 do Cap. I) mostra que as transformações conformes da forma:

$$(12)\quad f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad z \in H^2 \subset C,\quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\quad ad - bc = 1$$

(observe que f aplica H^2 sobre H^2) são isometrias de H^2 com a métrica g_{ij}. Também não é difícil mostrar que fixados um ponto $p_0 \in H^2$ e um vetor unitário v_0 em p_0, existe uma f na forma (12) que leva um ponto arbitrário $p \in H^2$ e um vetor unitário v de p em p_0 e v_0, respectivamente (basta observar que p e v são determinados por três parâmetros que é o número de parâmetros de f). Como existe uma única isometria de H^2 que leva (p, v) em (p_0, v_0), conclui-se que todas isometrias de H^2 são da forma (12). Isto termina a demonstração do caso $n = 2$ e do Teorema 5.3. □

Para concluir esta Seção, vamos identificar algumas hipersuperfícies importantes do espaço hiperbólico H^n. Não é difícil verificar que as intersecções com H^n dos hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ ortogonais a ∂H^n, e as intersecções com H^n das esferas de $\mathbb{R}^n$ com centro em ∂H^n são subvariedades totalmente geodésicas de H^n (v. Exercício 2). Vamos agora identificar as intersecções com H^n de planos e esferas do $\mathbb{R}^n$ em uma posição qualquer.

Para isto, e para muitos outros propósitos, é conveniente dispor de um modelo do espaço hiperbólico, o chamado modelo da bola. Considere a bola $B^n \subset \mathbb{R}^n$ de raio 2 e centro na origem

$$B^n = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < 2\}, \quad p = (x_1, \ldots, x_n)$$

e introduza em B^n a métrica

$$h_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2}.$$

Vamos mostrar que B^n é isométrico a H^n. Em verdade, mostraremos que a aplicação $f\colon B^n \to H^n$ dada por

$$(13) \quad f(p) = 4\,\frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} - (0, \ldots, 1), \quad \text{onde} \quad p_0 = (0, \ldots, -2),$$

é uma isometria. Com efeito, se v é um vetor em p e $\langle\ ,\ \rangle$ indica o produto interno na métrica euclidiana,

$$\langle df_p(v), df_p(v)\rangle = \frac{16\langle v, v\rangle}{|p - p_0|^4}.$$

Por outro lado, indicando $f(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p))$, obteremos

$$f_n(p) = \frac{4(x_n + 2)}{|p - p_0|^2} - 1 = \frac{4 - |p|^2}{|p - p_0|^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\langle df_p(v), df_p(v)\rangle}{(f_n(p))^2} = \frac{16|p - p_0|^4\langle v, v\rangle}{(4 - |p|^2)^2|p - p_0|^4} = \frac{\langle v, v\rangle}{\left(1 - \frac{1}{4}|p|^2\right)^2}.$$

Como f é injetiva, conclui-se que f é uma isometria de B^n em H^n. Observe que f leva $\partial B^n - \{p_0\}$ em ∂H^n.

Note que uma aplicação $g\colon B^n \to B^n$ é uma isometria de B^n na métrica h_{ij} se e só se g é a restrição a B^n de uma transformação conforme do $\mathbb{R}^n$ que leva B^n sobre B^n.

Seja agora $S \subset H^n$ uma $(n-1)$-esfera do espaço euclidiano inteiramente contida no semi-espaço superior H^n. Afirmamos que S é uma esfera geodésica de H^n com a métrica g_{ij}. Para ver isto, seja $f^{-1}(S)$ a imagem de S pela isometria $f^{-1}\colon H^n \to B^n$ dada em (13). Como a aplicação f^{-1} é conforme, $f^{-1}(S)$ é uma esfera euclidiana contida em B^n. Por uma isometria de B^n é possível levar o centro (euclidiano) de S na origem de B^n. Como a métrica h_{ij} de B^n é simétrica em relação a origem, a esfera assim obtida é uma esfera geodésica em B^n, e o mesmo se passa com sua imagem isométrica $S \subset H^n$.

Considere a seguir uma $(n-1)$-esfera euclidiana S tangente a ∂H^n em p e tal que $S - \{p\} \subset H^n$. Por uma inversão de $\mathbb{R}^n$ em p (que é uma isometria de H^n), S é levada em um hiperplano P paralelo a ∂H^n. Como a métrica induzida em P por H^n é um múltiplo da métrica euclidiana, P é uma variedade de curvatura constante zero e o mesmo se passa com sua imagem isométrica $S - \{p\}$. Tais subvariedades são chamadas *horoesferas* de H^n.

Considere finalmente uma esfera euclidiana S que corta ∂H^n segundo um ângulo α, e sua intersecção $S \cap H^n = \sum$ com H^n. Por uma inversão de $\mathbb{R}^n$ em um ponto de $S \cap \partial H^n$, $\sum$ é levada isometricamente na intersecção com H^n de um hiperplano P que corta ∂H^n segundo o mesmo ângulo α. Considere o hiperplano Q

que é ortogonal a ∂H^n e contém $P \cap \partial H^n$. Vamos mostrar que P é uma hipersuperfície equidistante da hipersuperfície totalmente geodésica Q. Para isto, seja γ_r uma geodésica, representada em H^n por um semi-círculo de raio r, com centro 0 em $P \cap \partial H^n$ e no plano perpendicular a $P \cap \partial H^n$. Como existe uma homotetia de centro 0 (isometria hiperbólica) levando o círculo de raio r em um círculo de raio qualquer, o comprimento de γ_r entre os pontos de intersecção de γ_r com P e Q não depende de r. Conclui-se que P, ou sua imagem isométrica $\sum$, é obtida tomando geodésicas perpendiculares a uma hipersuperfície totalmente geodésica Q e marcando sobre elas uma distância fixa. Tais hipersuperfícies são chamadas *superfícies equidistantes* (ou *hiperesferas*).

No Exercício 6, mostraremos que as hipersuperfícies acima descritas são caracterizadas pelo fato de terem, em cada ponto, todas as curvaturas principais iguais, isto é, elas são umbílicas, e calcularemos as suas curvaturas média e seccional.

Exercícios

1. Considere, em uma vizinhança do $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, a métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$$

onde $F \neq 0$ é uma função de $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Indique por $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, etc.

a) Mostre que uma condição necessária e suficiente para que a métrica tenha curvatura constante K é

$$(*) \qquad \begin{cases} F_{ij} = 0, \quad i \neq j, \\ F(F_{jj} + F_{ii}) = K + \sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 . \end{cases}$$

b) Use (*) para mostrar que a métrica g_{ij} tem curvatura constante K se e somente se

$$F = G_1(x_1) + G_2(x_2) + \cdots + G_n(x_n),$$

onde

$$G_i(x_i) = ax_i^2 + b_i x_i + c_i$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}(4c_i a - b_i^2) = K.$$

c) Faça $a = K/4$, $b_i = 0$, $c_i = 1/n$ e obtenha a fórmula de Riemann (V. [Ri])

$$(**) \qquad g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{K}{4}\sum x_i^2\right)^2}$$

para uma métrica g_{ij} de curvatura constante K. Se $K < 0$ a métrica g_{ij} é definida em uma bola de raio $\sqrt{\frac{4}{-K}}$.

d) Se $K > 0$, a mérica (**) é definida em todo o $\mathbb{R}^n$. Mostre que uma tal métrica em $\mathbb{R}^n$ não é completa.

2. Mostre que se M^k é uma subvariedade fechada, totalmente geodésica de H^n, $k \leq n$, então M^k é isométrica a H^k. Determine todas as subvariedades totalmente geodésicas de H^n.

3. (*Um outro modelo do espaço hiperbólico*). Considere em $\mathbb{R}^{n+1}$ a forma quadrática

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2, \ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Com a métrica pseudo-Riemanniana $(\,,\,)$ induzida por Q (Cf. Exercício 9, Cap. II), $\mathbb{R}^{n+1}$ será indicado por L^{n+1} (espaço de Lorentz). Indique por H_k^n, $k = -\frac{1}{r^2}$, a componente conexa que corresponde a $x_0 > 0$ da superfície regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por $Q(x) = -r^2$, $r > 0$. (Geometricamente $Q(x) = -r^2$ é uma espécie de hiperbolóide de duas folhas e H_k^n é a folha contida no semi-espaço $x_0 > 0$.)

a) Mostre que para todo $x \in H_k^n$, o vetor $\eta = \frac{x}{r}$ é normal ao espaço tangente $T_x(H_k^n)$.

b) Prove que $(\eta, \eta) = -1$, e que é possível escolher uma base $b_0, \ldots, b_n$ de L^{n+1} com $b_0 = \eta$, $(b_i, b_j) = \delta_{ij}$, $(b_i, b_0) = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. (Use o fato que o índice de uma forma quadrática não depende da base escolhida para representá-la.) Conclua daí que a métrica induzida por L^{n+1} em H_k^n é Riemanniana.

c) Use a conexão pseudo-Riemanniana $\overline{\nabla}$ de L^{n+1} (Cf. Exercício 9, Cap. II) para mostrar que $S_\eta = \left(-\frac{1}{r}\right) I$, onde I é a aplicação identidade. Conclua que $B(X, Y) = \frac{\eta}{r}(X, Y)$, e use a fórmula de Gauss para mostrar que a curvatura seccional de H_k^n é constante e igual a $k = -\frac{1}{r^2}$.

d) Seja $0^1\,(n+1)$ o subgrupo das transformações lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam a métrica $(\,,)$. Mostre que os elementos de $0^1\,(n+1)$ com det. > 0 são isometrias de H_k^n e que dados $X, Y \in H_k^n$ e bases ortonormais $\{v_i\} \in T_X(H_k^n)$ e $\{w_i\} \in T_Y(H_k^n)$, $i = 1, \ldots, n$, a restrição a H_k^n da transformação "linear" que leva

$$\frac{X}{r} \to \frac{Y}{r} \quad \text{e} \quad v_i \to w_i$$

que é uma isometria de H_k^n. Conclua daí que H_k^n tem curvatura constante (o que já sabíamos de (c)) e que H_k^n é completa.

e) Mostre que H_{-1}^n é isométrico ao espaço hiperbólico H^n.

f) Mostre que as simetrias de H_k^n em relação a planos P que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ e contêm o eixo x_0 são isometrias de H_k^n. Conclua que todas as geodésicas de H_n^k que passam por $(r, 0, \ldots, 0)$ são obtidas como intersecções $H_k^n \cap P$.

4. Identifique $\mathbb{R}^4$ com C^2 fazendo corresponder (x_1, x_2, x_3, x_4) a $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. Seja

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

e seja $h\colon S^3 \to S^3$ dada por

$$h(z_1, z_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{q}} z_1, e^{\frac{2\pi i r}{q}} z_2\right), \quad (z_1, z_2) \in S^3,$$

onde q e r são inteiros primos entre si, $q > 2$.

   a) Mostre que $G = \{\mathrm{id}, h, \ldots, h^{q-1}\}$ é um grupo de isometrias da esfera S^3, com a métrica usual, que opera de modo totalmente descontínuo. A variedade S^3/G é chamada um *espaço lenticular*.

   b) Considere S^3/G com a métrica induzida pela projeção $p\colon S^3 \to S^3/G$. Mostre que todas as geodésicas de S^3/G são fechadas mas podem ter comprimentos diferentes.

5. (*Conexões de métricas conformes*) Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas Riemannianas g e $\bar{g}$ em M são *conformes* se existe uma função positiva $\mu\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{g}(X, Y) = \mu g(X, Y)$, para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de g e $\bar{g}$, respectivamente. Prove que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

onde $S(X, Y) = \frac{1}{2\mu}\{(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y)\,\mathrm{grad}\,\mu\}$ e $\mathrm{grad}\,\mu$ é calculado na métrica g isto é, $X(\mu) = g(X, \mathrm{grad}\,\mu)$. *Sugestão*: Como $\overline{\nabla}$ é obviamente simétrica, basta mostrar que $\overline{\nabla}$ é compatível com $\bar{g}$ isto é, que

$$X\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z).$$

Mas o primeiro membro da igualdade acima é

$$X(\mu g(Y, Z)) = X(\mu)g(Y, Z) + \mu g(\nabla_Z Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z),$$

e o segundo é

$$\mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X |) + \mu\{g(S(X,Y),Z) + g(Y, S(X,Z))\}.$$

Portanto, basta mostrar que

$$X(\mu)g(Y,Z) = \mu\{g(S(X,Y),Z) + g(Y,S(X,Z))\},$$

o que decorre de um cálculo direto.

6. (*Hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico*) Seja (M^{n+1}, g) uma variedade com métrica Riemanniana g e seja ∇ a sua conexão Riemanniana. Diz-se que uma imersão $x\colon N^n \to M^{n+1}$ é (totalmente) *umbílica* se para todo $p \in N$, a segunda forma fundamental B de x em p satisfaz

$$\langle B(X,Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ e todo campo unitário η normal a $x(N)$; aqui estamos usando $\langle\ ,\ \rangle$ para indicar a métrica g em M e a métrica induzida por x em N.

a) Mostre que se M^{n+1} tem curvatura seccional constante, λ não depende de p.

Sugestão: Sejam $T, X, Y \in \mathcal{X}(N)$. A condição dada implica que

$$-\langle \nabla_X \eta, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle \quad \text{e} \quad -\langle \nabla_T \eta, Y\rangle = \lambda\langle T, Y\rangle.$$

Derive a primeira equação em relação a T e a segunda em relação a X, obtendo, para todo Y,

$$\langle \nabla_T \nabla_X \eta - \nabla_X \nabla_T \eta, Y\rangle = -\langle T(\lambda)X - X(\lambda)T + \nabla_{[T,X]}\eta, Y\rangle.$$

Use o fato que M tem curvatura seccional constante para concluir que $T(\lambda)X - X(\lambda)T = 0$. Como T e X podem ser escolhidos linearmente independentes, isto significa que $X(\lambda) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(N)$, donde $\lambda = \text{const.}$

b) Use o Exercício 5 para mostrar que se mudarmos a métrica g para a métrica $\bar{g} = \mu g$, conforme a g, a imersão $x\colon N^n \to (M^{n+1}, \bar{g})$ continua a ser umbílica, isto é, se (usando a notação do exercício citado) $\langle \nabla_X \eta, Y\rangle_g = -\lambda \langle X, Y\rangle_g$, então

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}}\right), Y \right\rangle_{\bar{g}} = \frac{-2\lambda\mu + \eta(\mu)}{2\mu\sqrt{\mu}} \langle X, Y\rangle_{\bar{g}}.$$

c) Tome $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclidiana. Mostre que se $x\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é umbílica, então $x(N)$ está contida em um n-plano ou uma n-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sugestão: Por (a), $\lambda = \text{const.}$. Se $\lambda = 0$, $\langle \nabla_X \eta, Y\rangle = 0$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ e todo $\eta \in \mathcal{X}(N)^\perp$. Decorre daí que $x(N)$ está contido em um n-plano afim de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\lambda \neq 0$, considere a aplicação $y\colon N \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$y(p) = x(p) - \frac{\eta(p)}{\lambda}, \quad p \in N.$$

Sejam $T, Y \in \mathcal{X}(N)$. Observe que

$$\langle \nabla_T y, Y\rangle = \langle T, Y\rangle - \frac{1}{\lambda}\langle \nabla_T \eta, Y\rangle = 0.$$

Decorre daí que $y(N)$ reduz-se a um ponto, digamos x_0, e que x satisfaz

$$|x(p) - x_0|^2 = 1/\lambda^2,$$

isto é, $x(N)$ está contida em uma esfera de centro x_0 e raio $1/\lambda$.

d) Use (b) e (c) para concluir que as hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico, no modelo do semi-espaço superior H^{n+1}, são as intersecções com H^{n+1} de n-planos ou n-esferas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, as hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico são as esferas geodésicas, as horoesferas e as hiperesferas. Conclua que tais hipersuperfícies têm curvatura seccional constante.

e) Calcule a curvatura média e a curvatura seccional das hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico.

Sugestão: Considere o modelo H^n do semi-espaço superior. Seja $\sum = S \cap H^n$ a intersecção de H^n com uma $(n-1)$-esfera euclidiana $S \subset \mathbb{R}^n$ de raio 1 e centro em H^n. Como $\sum$ é umbílica, todas as direções são principais, e basta calcular a curvatura da curva intersecção de $\sum$ com o plano $x_1 x_n$. Use a expressão obtida na parte (b) deste exercício para concluir que a curvatura média de $\sum$ (na métrica de H^n) é igual a 1 se S é tangente a ∂H^n, é igual a $\cos\alpha$ se S faz um ângulo α com ∂H^n, e é igual a "altura"do centro euclidiano de S relativamente a ∂H^n, se $S \subset H^n$. Para calcular as curvaturas seccionais, use a fórmula de Gauss.

7. Defina uma "projeção estereográfica" $f\colon H^n_{-1} \to D$ do modelo do espaço hiperbóico H^n_{-1} de curvatura -1 dado no Exercício 3 sobre a bola aberta

$$D^n = \{(x_0, \ldots, x_n); x_0 = 0, \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2 < 1\}$$

do seguinte modo: Se $p \in H^n_{-1} \subset L^{n+1}$, ligue p a $p_0 = (-1, 0, \ldots, 0)$ por uma reta r; $f(p)$ é a intersecção de r com D^n (v. Fig. 3). Sejam $p = (x_0, \ldots, x_n)$ e $f(p) = (0, u_1, \ldots, u_n)$.

a) Prove que:

$$x_0 = \frac{2u_\alpha}{1 - \sum_\alpha u_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

$$x_0 = \frac{2}{1 - \sum_\alpha u_\alpha^2} - 1$$

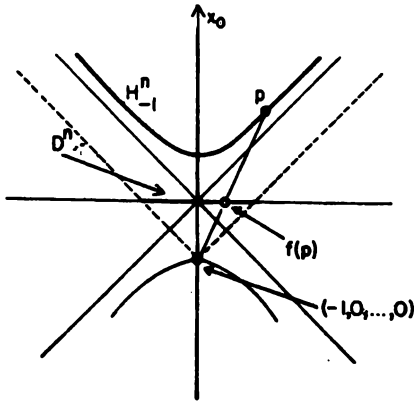


Figura 3

b) Mostre que

$$-(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2 = \frac{4\{(du_1)^2 + \cdots + (du_n)^2}{\left(1 - \sum_\alpha u_\alpha^2\right)^2}.$$

Conclua que $f^{-1}\colon D^n \to H^n_{-1}$ induz em D a métrica $g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{\left(\sum_\alpha u_\alpha^2\right)^2}$. Portanto D^n com a métrica g_{ij} tem curvatura constante -1 (Cf. Exercício 1(c)).

c) Mostre que as imagens por f das intersecções não vazias de hiperplanos afins P de L^{n+1} com H^n_{-1} são intersecções com D^n de esferas (ou planos, quando P passa por p_0) contidas no hiperplano $x_0 = 0$. Conclua que as hipersuperfícies umbílicas de H^n_{-1} (Cf. Exercício 6) são da forma $P \cap H^n_{-1}$.

8. (*Submersão Riemanniana*) Uma aplicação diferenciável $f\colon \overline{M}^{n+k} \to M^n$ é uma *submersão* se f é sobrejetiva, e para todo $\bar{p} \in \overline{M}$, $df_{\bar{p}}\colon T_{\bar{p}}\overline{M} \to T_{f(p)}M$ tem posto n. Neste caso, para todo $p \in M$, a *fibra* $f^{-1}(p) = F_p$ é uma subvariedade de $\overline{M}$ e um vetor tangente de $\overline{M}$, tangente a

algum F_p, $p \in M$, é chamado um *vetor vertical* da submersão. Se, além disto, $\overline{M}$ e M têm métricas Riemannianas, a submersão f diz-se *Riemanniana* se, para todo $p \in \overline{M}$, $df_p\colon T_p\overline{M} \to T_{f(p)}M$ preserva comprimentos de vetores ortogonais a F_p. Mostre que:

a) Se $M_1 \times M_2$ é um produto Riemanniano, então as projeções naturais $\pi_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$, $i = 1, 2$, são submersões Riemannianas.

b) Se o fibrado tangente TM possui a métrica Riemanniana dada no Exercício 2 do Cap. III, então a projeção $\pi\colon TM \to M$ é uma submersão Riemanniana.

9. (*Conexão de uma submersão Riemanniana*) Seja $f\colon \overline{M} \to M$ uma submersão Riemanniana. Um vetor $\bar{x} \in T_{\bar{p}}\overline{M}$ é *horizontal* se ele é ortogonal à fibra. O espaço tangente $T_{\bar{p}}\overline{M}$ admite então a decomposição $T_{\bar{p}}\overline{M} = (T_{\bar{p}}\overline{M})^h \oplus (T_{\bar{p}}\overline{M})^v$, onde $(T_{\bar{p}}\overline{M})^h$ e $(T_{\bar{p}}\overline{M})^v$ indicam os subespaços dos vetores horizontais e verticais, respectivamente. Se $X \in \mathcal{X}(M)$, o *levantamento horizontal* $\overline{X}$ de X é o campo horizontal definido por $df_{\bar{p}}(\overline{X}(\bar{p})) = X(p)$.

a) Mostre que $\overline{X}$ é diferenciável.

b) Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$ respectivamente. Mostre que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{(\nabla_X Y)} + \frac{1}{2}[\overline{X}, \overline{Y}]^v, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

onde Z^v é a componente vertical de Z.

c) $[\overline{X}, \overline{Y}]^v(\bar{p})$ depende apenas de $\overline{X}(\bar{p})$ e de $\overline{Y}(\bar{p})$.

Sugestão (b): Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Seja $T \in \mathcal{X}(\overline{M})$ um campo vertical. Observe que:

$$\langle \overline{X}, T \rangle = \langle \overline{Y}, T \rangle = 0, \quad \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = X\langle Y, Z \rangle,$$

$$df[\overline{X}, T] = 0, \quad [X, Y] = [df\overline{X}, df\overline{Y}] = df[\overline{X}, \overline{Y}] \text{ e}$$

$$T\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle = 0.$$

Conclua que $\langle [\overline{X}, \overline{Y}], \overline{Z} \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$, $\langle [\overline{X}, T], \overline{Y} \rangle = 0$ e use a fórmula da conexão Riemanniana em função da métrica para obter

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z} \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle, \quad 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, T \rangle = \langle T, [\overline{X}, \overline{Y}] \rangle,$$

o que implica (b).
Sugestão: (c). Use o fato que

$$\langle [\overline{X}, \overline{Y}], T \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, T \rangle.$$

10. (*Curvatura de uma submersão Riemanniana*) Seja $f\colon \overline{M} \to M$ uma submersão Riemanniana. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{W}$ seus levantamentos horizontais, e sejam R e $\overline{R}$ os tensores de curvatura de M e $\overline{M}$ respectivamente. Prove que:

a) $$\begin{aligned} \langle \overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{W} \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\ &- \tfrac{1}{4} \langle [\overline{X}, \overline{Z}]^v, [\overline{Y}, \overline{W}]^v \rangle + \tfrac{1}{4} \langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{W}]^v \rangle \\ &- \tfrac{1}{2} \langle [\overline{Z}, \overline{W}]^v, [\overline{X}, \overline{Y}]^v \rangle. \end{aligned}$$

b) $$K(\sigma) = \overline{K}(\bar{\sigma}) + \tfrac{3}{4} \left| [\overline{X}, \overline{Y}]^v \right|^2 \geq \overline{K}(\bar{\sigma}),$$

onde σ é o plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\bar{\sigma}$ é o plano gerado por $\overline{X}$, $\overline{Y}$.
Sugestão para (a): Usaremos as notações do Exercício 9. Observe que $\overline{X}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle = X\langle \nabla_Y Z, W \rangle$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle &= \overline{X}\langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{W} \rangle - \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{W} \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \frac{1}{4} \langle [\overline{Y}, \overline{Z}]^v, [\overline{X}, \overline{W}]^v \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $T \in \mathcal{X}(\overline{M})$ é vertical,

$$\langle \overline{\nabla}_T \overline{X}, \overline{Y} \rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} T, \overline{Y} \rangle + \langle [T, \overline{X}], \overline{Y} \rangle = -\langle T, \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z},\overline{W}\rangle = \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^h}\overline{Z},\overline{W}\rangle + \langle \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]^v}\overline{Z},\overline{W}\rangle$$
$$= \langle \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z,W\rangle - \frac{1}{2}\langle [\overline{X},\overline{Y}]^v,[\overline{Z},\overline{W}]^v\rangle.$$

Juntando o acima, obtém-se (a).

11. (*O espaço projetivo complexo*) Seja

$$C^{n+1} = \{(z_0,\ldots,z_n) = Z,\ z_j = x_j + iy_j\ ,\ j = 0,\ldots,n\}$$

o conjunto das $(n+1)$-plas de números complexos z_j. Defina uma relação de equivalência em C^{n+1}: $Z{=}(z_0,\ldots,z_n) \sim W = (w_0,\ldots,w_n)$ se $z_j = \lambda w_j$, $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$. A classe de equivalência de Z será indicada por $[Z]$ (= reta complexa passando pela origem e por Z). O conjunto de tais classes é chamado, por analogia com o caso real, o *espaço projetivo complexo* $P^n(C)$ de dimensão complexa n.

   a) Mostre que $P^n(C)$ tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão real $2n$ e que $P^1(C)$ é difeomorfo a S^2.

   b) Seja $(Z,W) = z_0\bar{w}_0 + \cdots + z_n\bar{w}_n$ o produto hermitiano em C^{n+1}, onde barra indica o complexo conjugado. Identifique $C^{n+1} \approx R^{2n+2}$ fazendo $z_j = x_j + iy_j = (x_j, y_j)$. Mostre que

$$S^{2n+1} = \{N \in C^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2}; (N,N) = 1\}$$

   é a esfera unitária de $\mathbb{R}^{2n+2}$.

   c) Mostre que a relação de equivalência $\sim$ induz em S^{2n+1} a seguinte relação de equivalência: $Z \sim W$ se $e^{i\theta}\,Z = W$. Conclua que existe uma aplicação diferenciável (aplicação de Hopf) $f\colon S^{2n+1} \to P^n(C)$ tal que

$$f^{-1}([Z]){=}\{e^{i\theta}N{\in}S^{2n+1}, N{\in}[Z]{\cap}S^{2n+1},\ 0{\leq}\theta{\leq}2\pi\}$$
$$= [Z] \cap S^{2n+1}.$$

d) Mostre que f é uma submersão.

12. (*Curvatura do espaço projetivo complexo*) Defina uma métrica Riemanniana em $C^{n+1} - \{0\}$ do seguinte modo: Se $Z \in C^{n+1} - \{0\}$ e $V, W \in T_Z(C^{n+1} - \{0\})$,

$$\langle V, W \rangle_Z = \frac{\text{Real } (V, W)}{(Z, Z)}.$$

Observe que a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ restrita a $S^{2n+1} \subset C^{n+1} - \{0\}$ coincide com a métrica induzida por $\mathbb{R}^{2n+2}$.

a) Mostre que, para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $e^{i\theta}\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ é uma isometria, e que, portanto, é possível definir uma métrica Riemanniana em $P^n(C)$ de modo que a submersão f seja Riemanniana.

b) Mostre que, nesta métrica, a curvatura seccional de $P^n(C)$ é dada por

$$K(\sigma) = 1 + 3\cos^2\varphi,$$

onde σ é gerado pelo par ortonormal X, Y, $\cos\varphi = \langle \overline{X}, i\overline{Y} \rangle$, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são os levantamentos horizontais de X e Y, respectivamente. Em particular, $1 \leq K(\sigma) \leq 4$.

Sugestão (b): Seja N o vetor que descreve S^{2n+1}. Como $\left(\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} N\right)_{\theta=0} = iN$, $iN \in T_N(S^{2n+1})$ e é vertical. Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{2n+2} \approx C^{n+1}$ e $X, Y \in \mathcal{X}(P^n(C))$. Tome $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^{2n+1}$ com $\alpha(0) = N$, $\alpha'(0) = \overline{X}$. Então

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} iN\right)_N &= \frac{d}{dt}\, iN \circ \alpha(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, i\alpha(t)\Big|_{t=0} \\ &= i\alpha'(0) = i\overline{X}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle [\overline{X}, \overline{Y}], iN \rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, iN \rangle \\ &= -\langle i\overline{X}, \overline{Y} \rangle + \langle i\overline{Y}, \overline{X} \rangle = 2\cos\varphi.\end{aligned}$$

Agora use o Exercício 10 (b).

13. Seja $p \in M$ e $\sigma\colon M \to M$ uma isometria tal que $\sigma(p) = p$ e $d\sigma_p(v) = -v$, para todo $v \in T_pM$. Seja X um campo paralelo ao longo de uma geodésica γ de M com $\gamma(0) = p$. Mostre que $d\sigma_{\gamma(t)}X(\gamma(t)) = -X(\gamma(-t))$.
Sugestão: É claro que $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. Mostre que $d\sigma_{\gamma(t)}X(\gamma(t))$ é um campo paralelo ao longo de $\gamma(t)$. Note que para $t = 0$, $d\sigma_{\gamma(t)}X(\gamma(t)) = -X(\gamma(-t))$, e use a unicidade de campos paralelos, com condições iniciais dadas.

14. (*Caracterização geométrica dos espaços localmente simétricos*). Seja M uma variedade Riemannina. Uma *simetria local* em $p \in M$ é uma aplicação $\sigma\colon B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(p)$ de uma bola geodésica normal centrada em p tal que $\sigma(\gamma(t)) = \gamma(-t)$, onde γ é uma geodésica radial ($\gamma(0) = p$) de $B_\varepsilon(p)$. Prove que: *M é localmente simétrico $\Leftrightarrow$ toda simetria local é uma isometria.*
Sugestão $\Rightarrow$: Considere um referencial geodésico $e_1, \ldots, e_n$ na bola $B_\varepsilon(p)$ (Cf. Exercício 7 do Cap. III) e faça $R_{ijk\ell} = R(e_i, e_j, e_k, e_\ell)$. Como $\nabla R = 0$, $R_{ijk\ell}$ é constante ao longo das geodésicas que partem de p. Seja $i\colon T_pM \to T_pM$ a isometria linear dada por $i(v) = -v$, $v \in T_pM$, e observe que $\sigma = \exp_p \circ i \circ \exp_p^{-1}$. Use o Teorema de Cartan para concluir que σ é uma isometria.

$\Leftarrow$: Sejam $p \in M$ e $Z \in T_p(M)$. Considere uma geodésica $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = Z$. Tome uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ em T_pM, e obtenha, por transporte paralelo, um referencial $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ ao longo de γ. Faça $R_{ijk\ell}(t) = R(e_i(t), e_k(t), e_\ell(t))$. Então

$$(\nabla_Z R)(p) = \frac{d}{dt} R_{ijk\ell}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{R_{ijk\ell}(t) - R_{ijk\ell}(-t)}{2t} = 0$$

onde, na última igualdade, usamos que σ é uma isometria e o exercício anterior. Como p e Z são arbitrários, $\nabla R = 0$.

Capítulo IX

Variações da Energia

1 Introdução

No Capítulo III, definimos as geodésicas como curvas de aceleração nula e vimos que elas são caracterizadas pelo fato de minimizarem localmente o comprimento de arco. Neste capítulo, apresentaremos uma caracterização das geodésicas como "soluções de um problema variacional". Para isto, precisamos introduzir certas idéias que são adaptações aos objetivos da Geometria Diferencial de conceitos e técnicas do Cálculo das Variações. Nenhum conhecimento de Cálculo das Variações será admitido.

O ponto fundamental do capítulo é o cálculo da fórmula da segunda variação da energia de uma geodésica, que será apresentado na Seção 2. Na Seção 3, faremos duas aplicações geométricas desta fórmula. A primeira (Teorema de Bonnet-Myers) afirma que uma variedade completa cuja curvatura é positiva e não se aproxima de zero é compacta, e seu diâmetro pode ser estimado em termos da limitação da curvatura. A segunda é uma extensão, devida a A. Weinstein, de um teorema de Synge que afirma ser simplesmente conexa uma variedade compacta, orientável, de dimensão par e curvatura positiva.

Junto com o teorema de Hadamard, as aplicações incluidas neste capítulo se referem a investigações que procuram determi-

nar a influência da curvatura na topologia das variedades Riemannianas. Estes resultados culminaram com o Teorema da Esfera (v. Cap. XIII) e possuem ramificações que se estendem até os nossos dias.

2 As fórmulas das primeira e segunda variações da energia

Iniciaremos dando precisão à idéia de "curvas vizinhas" de uma curva dada.

2.1 Definição. Seja $c\colon [0,a] \to M$ uma curva diferenciável por partes em uma variedade M. Uma *variação* de c é uma aplicação contínua $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,a] \to M$ tal que:

a) $f(0,t) = c(t)$, $t \in [0,a]$,

b) existe uma subdivisão de $[0,a]$ por pontos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = a$, tal que a restrição de f a cada $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, é diferenciável.

Uma variação diz-se *própria* se

$$f(s,0) = c(0) \quad \text{e} \quad f(s,a) = c(a),$$

para todo $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Se f é diferenciável, a variação diz-se *diferenciável.*

Para cada $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, a curva parametrizada $f_s\colon [0,a] \to M$ dada por $f_s(t) = f(s,t)$ é chamada uma *curva da variação.* Deste modo, uma variação determina uma família $f_s(t)$ de curvas vizinhas de $f_0(t) = c(t)$, e a variação é própria se e só se as curvas desta família têm o mesmo ponto inicial $c(0)$ e o mesmo ponto final $c(a)$.

É conveniente chamar *curva transversal da variação* à curva parametrizada diferenciável $f_t\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, t fixado, dada por $f_t(s) = f(s,t)$. O vetor velocidade de uma curva transversal em

$s = 0$, ou seja, $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ é um campo vetorial (diferenciável por partes) ao longo de $c(t)$ e é chamado *campo variacional* de f (Fig. 1).

2.2 Proposição. *Dado um campo $V(t)$, diferenciável por partes, ao longo de uma curva diferenciável por partes $c\colon [0,a] \to M$, existe uma variação $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a] \to M$ de c, tal que $V(t)$ é o campo variacional de f; além disto, se $V(0) = V(a) = 0$, é possível escolher f como uma variação própria.*

Demonstração: Como $c([0,a]) \subset M$ é compacto, é possível determinar um $\delta > 0$ tal que $\exp_{c(t)}$, $t \in [0,a]$, está bem definida para todo $v \in T_{c(t)}M$, com $|v| < \delta$. Com efeito, para cada $c(t)$ considere a vizinhança totalmente normal W_t de $c(t)$ e o número $\delta_t > 0$ associado a esta vizinhança (Teor. 3.7, Cap. III). A união $\bigcup_t W_t$ cobre o compacto $c([0,a])$ e, portanto, um número finito dos W_t's, digamos $W_1, \ldots, W_n$, ainda cobre $c([0,a])$. Tomando $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, onde $\delta_i > 0$ é o número correspondente à vizinhança W_i, $i = 1, \ldots, n$, vemos que este δ satisfaz as condições da afirmação feita.

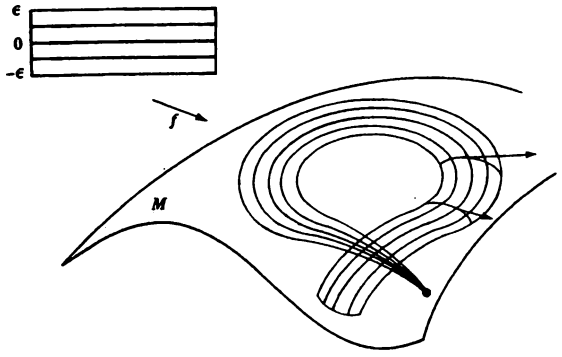


Figura 1

Considere $N = \max_{t\in[0,a]} |V(t)|$, $\varepsilon < \frac{\delta}{N}$ e defina $f(s,t) = \exp_{c(t)} sV(t)$, $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $t \in [0,a]$.

Pela escolha de ε, a aplicação $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M$ está bem definida. Além disso, como

$$\exp_{c(t)} sV(t) = \gamma(1, c(t), sV(t))$$

e a geodésica $\gamma(1, c(t), sV(t))$ depende diferencialmente das condições iniciais, a aplicação f é diferenciável por partes. É imediato verificar que $f(0,t) = c(t)$.

Finalmente, o campo variacional de f é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \frac{d}{ds}(\exp_{c(t)} sV((t))\Big|_{s=0} = \big(d\exp_{c(t)}\big)_0 V(t) = V(t),$$

e é claro que, pela definição de f, se $V(0) = V(a) = 0$ então f é própria. □

Para comparar o comprimento de arco de c com o comprimento de arco das curvas vizinhas de uma variação $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\to M$ de c definiremos a função $L\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ por

$$L(s) = \int_0^s \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right| dt, \quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon),$$

isto é, $L(s)$ é o comprimento da curva $f_s(t)$. Será mais conveniente, entretanto, estudar a *função energia* $E(s)$ dada por

$$E(s) = \int_0^s \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right|^2 dt, \quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

Para esse estudo, precisamos de alguns fatos gerais acerca da função energia.

Seja $c\colon [0,a]\to M$ uma curva e sejam

$$L(c) = \int_0^a \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \quad \text{e} \quad E(c) = \int_0^a \left|\frac{dc}{dt}\right|^2 dt.$$

Fazendo $f\equiv 1$ e $g = \left|\frac{dc}{dt}\right|$ na desigualdade de Schwarz:

$$\left(\int_0^a fg\,dt\right)^2 \le \int_0^a f^2\,dt\cdot\int_0^a g^2\,dt,$$

obteremos

$$L(c)^2 \leq aE(c),$$

e a igualdade ocorre se e somente se g é constante, ou seja, se e somente se t é proporcional ao comprimento de arco.

O lema abaixo mostra que as curvas que minimizam a energia são automaticamente parametrizadas por um parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Esta é uma das vantagens de trabalhar com a função energia no lugar da função comprimento de arco.

2.3 Lema. *Sejam $p, q \in M$ e $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica minimizante ligando p a q. Então, para toda curva $c\colon [0,a] \to M$ ligando p a q,*

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

e vale a igualdade se e somente se c é uma geodésica minimizante.

Demonstração: Das considerações acima, segue que

$$aE(\gamma) = (L(\gamma))^2 \leq (L(c))^2 \leq aE(c),$$

o que prova a primeira afirmação. Se a igualdade é válida, temos $(L(c))^2 = aE(c)$, o que implica que o parâmetro de c é proporcional ao comprimento de arco, e $L(\gamma) = L(c)$, o que implica que c é uma geodésica, evidentemente minimizante, (ver Corolário 3.9 do Capítulo III). A recíproca é óbvia. □

Agora, voltemos à função energia $E(s)$ definida por uma variação. Uma primeira informação sobre o comportamento de E é dada pelo valor de sua derivada primeira.

2.4 Proposição (Fórmula da primeira variação da energia de uma curva). *Sejam $c\colon [0,a] \to M$ uma curva diferenciável por partes e $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,a] \to M$ uma variação de c. Se*

$E\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ é a energia de f então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E'(0) = &-\int_0^a \left\langle V(t),\, \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right\rangle dt\\ &-\sum_{i=1}^{k}\left\langle V(t_i),\, \frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)\right\rangle\\ &-\left\langle V(0),\, \frac{dc}{dt}(0)\right\rangle+\left\langle V(a),\, \frac{dc}{dt}(a)\right\rangle,\end{aligned}\tag{1}$$

onde $V(t)$ é o campo variacional de f, e

$$\frac{dc}{dt}(t_i^+)=\lim_{\substack{t\to t_i\\ t>t_i}}\frac{dc}{dt},\quad \frac{dc}{dt}(t_i^-)=\lim_{\substack{t\to t_i\\ t<t_i}}\frac{dc}{dt}.$$

Demonstração: Por definição,

$$E(s)=\int_0^a\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt=\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt.$$

Derivando sob o sinal de integração e usando a simetria da conexão Riemanniana, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2\left\langle\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt\\ &= 2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt\\ &= 2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{d}{dt}\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt-2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt\\ &= 2\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}-2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}=\sum_{i=0}^{k}\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}-\int_0^a\left\langle\frac{\partial f}{\partial s},\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt.\tag{2}$$

Fazendo $s = 0$ em (2), obtém-se (1). □

Uma aplicação imediata da fórmula da primeira variação é a seguinte caracterização das geodésicas.

2.5 Proposição. *Uma curva diferenciável por partes* $c\colon [0,a] \to M$ *é uma geodésica se e somente se, para toda variação própria* f *de* c, *tem-se* $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.

Demonstração: Se c é uma geodésica, $\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt} = 0$ e c é regular. Portanto se f é própria, $V(0) = V(a) = 0$, e todos os termos de (1) são nulos. Reciprocamente, suponhamos que $\frac{dE}{ds}(0) = 0$, para toda variação própria de c. Seja $V(t) = g(t)\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}$, onde $g\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável por partes com $g(t) > 0$ se $t \neq t_i$ e $g(t_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$. Construa uma variação de c tendo $V(t)$ como o campo variacional. Então, como

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}(0) = -\int_0^a g(t)\left\langle \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}, \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\right\rangle dt = 0,$$

devemos ter $\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt} = 0$ para cada intervalo (t_i, t_{i+1}), ou seja, c é uma geodésica em cada (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, k$.

Para ver o que ocorre nos pontos t_i, considere um outro campo variacional $\overline{V}(t)$ tal que $\overline{V}(0) = \overline{V}(a) = 0$ se $t \neq 0$, a, $\overline{V}(t_i) = \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-)$. Então, usando o fato que c é uma geodésica em (t_i, t_{i+1}), obteremos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{dE}{ds}(0) \\ &= -\sum_{i=1}^{k}\left\langle \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-), \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-)\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-)\right|^2, \end{aligned}$$

ou seja, c é de classe C^1 em cada t_i. Como $\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt} = 0$ em t_i, c satisfaz a equação das geodésicas em $(0,a)$. Por unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, $c \in C^\infty$ e, portanto, c é uma geodésica. □

2.6 Observação. A Proposição 2.5 fornece uma caracterização das geodésicas como pontos críticos da energia para toda variação própria. É neste sentido que dizemos serem as geodésicas soluções de um problema variacional. Observe que, em contraste com as caracterizações anteriores, uma tal caracterização não é local mas envolve o comportamento da geodésica como um todo.

2.7 Observação. Existe uma certa analogia entre primeira variação de uma variação própria e a derivação usual de funções definidas sobre uma variedade diferenciável. É natural pensar no conjunto $\Omega_{p,q}$ das curvas diferenciáveis por partes c, ligando dois pontos p e q de M, como uma variedade, um vetor tangente no ponto c sendo um campo vetorial V diferenciável por partes ao longo de c que se anula nas extremidades de c. A energia E é então uma função diferenciável sobre uma tal variedade, e $\frac{dE}{ds}(0)$ é a derivada de E na direção de V; geodésicas ligando p a q são pontos críticos da função E.

A dificuldade com este ponto de vista é que o espaço tangente de uma tal variedade em um ponto c (ou seja, o conjunto de campos diferenciáveis por partes ao longo de c) não é de dimensão finita. Daí a impossibilidade de encontrar parametrizações locais desta variedade por conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$. Este espaço tangente é, entretanto, um espaço vetorial (de dimensão infinita) e isto sugere a possibilidade de variedades de dimensão infinita. Tais variedades podem em verdade ser construidas mas não trataremos delas aqui. O leitor interessado poderá consultar Palais, R., "Morse theory on Hilbert manifolds", Topology 2 (1963), 399-340.

Como $\frac{dE}{ds}(0)$ é zero para toda variação própria de uma geodésica, nossa próxima informação sobre a energia de curvas vizinhas é dada por $\frac{d^2E}{ds^2}(0)$, que passamos a calcular.

2.8 Proposição (Fórmula da segunda variação). *Seja* $\gamma\colon [0,a] \to M$ *uma geodésica e* $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a] \to M$ *uma variação própria*

de γ. Seja E a função energia da variação. Então

$$(3)\quad \frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right)\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt - \sum_{i=1}^{k}\left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-)\right\rangle,$$

onde V é o campo variacional de f, R é a curvatura de M e

$$\frac{DV}{dt}(t_i^+) = \lim_{\substack{t\to t_i\\ t>t_i}} \frac{DV}{dt}, \quad \frac{DV}{dt}(t_i^-) = \lim_{\substack{t\to t_i\\ t<t_i}} \frac{DV}{dt}.$$

Demonstração: Tomando a derivada de (2), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2} = \sum_{i=0}^{k}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^a \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle dt.$$

Fazendo $s = 0$ na expressão acima, obtemos que o primeiro e terceiro termos são nulos, pois f é própria e γ é uma geodésica. Além disso, como

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial f}{\partial t},$$

temos, em $s = 0$,

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D^2}{dt^2}V + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right)\frac{d\gamma}{dt}.$$

Usando de novo o fato que a variação é própria, obtém-se

$$(4)\quad \sum_{i=0}^{k}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = -\sum_{i=1}^{k}\left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-)\right\rangle.$$

Juntando estes fatos, obtém-se (3). □

2.9 Observação. Se a variação não é própria, o primeiro termo no início da demonstração da Proposição 2.8 não se anula. Juntando a isso os termos correspondentes a $i = 0$ e $i = k + 1$ do segundo membro de (4), obteremos a seguinte expressão:

$$(5)\quad \frac{1}{2}E''(0) = -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right)\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-)\right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle(0,0)$$
$$+\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle(0,a) - \left\langle V(0), \frac{DV}{dt}(0)\right\rangle + \left\langle V(a), \frac{DV}{dt}(a)\right\rangle.$$

2.10 Observação. Muitas vezes é conveniente escrever a expressão (5) da maneira seguinte. Como, em cada intervalo onde V é diferenciável, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left\langle V, \frac{DV}{dt}\right\rangle = \left\langle V, \frac{D^2V}{dt^2}\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right\rangle,$$

podemos escrever, tomando uma geodésica $\gamma\colon [0,a] \to M$, e a partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = a$,

$$\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma'\right\rangle dt = \sum_{i=0}^{k}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt}\left\langle V, \frac{DV}{dt}\right\rangle dt\right.$$
$$\left. - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}\right\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\right) dt\right\}.$$

Portanto

$$\frac{1}{2}E''(0) = \sum_{i=0}^{k}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle)dt\right\}$$
$$- \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle(0,0) + \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle(0,a)$$
$$= \int_0^a \{\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\}dt$$
$$- \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma'\right\rangle(0,0) + \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma'\right\rangle(0,a).$$

Por razões que ficarão claras posteriormente, é conveniente escrever

$$\int_0^a \{\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\} dt = I_a(V, V).$$

Observe que, se a variação é própria, $I_a(V, V) = \frac{1}{2} E''(0)$ depende apenas de V. No caso geral, temos

$$(6) \quad \frac{1}{2} E''(0) = I_a(V, V) - \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle (0, 0) + \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle (0, a).$$

2.11 Observação. É possível estabelecer fórmulas das primeira e segunda variações para a função $L(s)$ que representa o comprimento de arco das curvas da variação. As expressões são inteiramente análogas às obtidas para a energia e, como não faremos uso delas, serão deixadas como exercícios e não serão tratadas aqui (v. entretanto [dC 2] p. 350).

2.12 Observação. A analogia mencionada na Observação 2.7 pode ser levada adiante, considerando $2I_a(V, V)$ como o hessiano $d^2 E(V, V)$ da função energia $E\colon \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ no ponto crítico $\gamma \in \Omega_{p,q}$ segundo o "vetor" V.

3 O Teorema de Bonnet-Myers e o Teorema de Synge-Weinstein

Passaremos agora a algumas aplicações da fórmula da segunda variação da energia.

3.1 Teorema (Bonnet [Bo], Myers [My]). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\mathrm{Ric}_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p(M)$, $|v| = 1$. Então M é compacta e o diâmetro $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$.

Demonstração: Sejam p e q pontos quaisquer de M. Como M é completa, existe uma geodésica minimizante $\gamma\colon [0,1] \to M$ ligando p a q. Basta mostrar que o comprimento $\ell(\gamma) \leq \pi r$, pois então M é limitada e completa, donde compacta; além disto, como $d(p,q) \leq \pi r$, quaisquer que sejam $p, q \in M$, segue-se que $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$, como queremos.

Suponhamos, por absurdo, que $\ell(\gamma) = \ell > \pi r$. Consideremos campos paralelos $e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t)$ ao longo de γ que, para cada $t \in [0,1]$, são ortonormais e pertencem ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$. Seja $e_n(t) = \frac{\gamma'(t)}{\ell}$ e seja V_j um campo de vetores ao longo de γ dado por

$$V_j(t) = (\operatorname{sen} \pi t) e_j(t), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

É claro que $V_j(0) = V_j(1) = 0$, donde V_j dá origem a uma variação própria de γ, cuja energia indicaremos por E_j.

Usando a fórmula da segunda variação da energia e o fato que e_j é paralelo, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_j''(0) &= -\int_0^1 \langle V_j, V_j'' + R(\gamma', V_j)\gamma' \rangle dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi t (\pi^2 - \ell^2 K(e_n(t), e_j(t)))\, dt, \end{aligned}$$

onde $K(e_n(t), e_j(t))$ é a curvatura seccional em $\gamma(t)$ segundo o plano gerado por $e_n(t)$, $e_j(t)$. Somando em j e usando a definição de curvatura de Ricci, obteremos

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) = \int_0^1 \{\operatorname{sen}^2 \pi t ((n-1)\pi^2 - (n-1)\ell^2 \operatorname{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)))\} dt.$$

Como $\operatorname{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) \geq \frac{1}{r^2}$ e $\ell > \pi r$, temos que

$$(n-1)\ell^2 \operatorname{Ric}_{\gamma(t)}(e_n(t)) > (n-1)\pi^2,$$

donde

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi t ((n-1)\pi^2 - (n-1)\pi^2)\, dt = 0.$$

Decorre daí que existe um índice j tal que $E_j''(0) < 0$, o que, pelo Lema 2.3, contradiz o fato de ser γ minimizante. Portanto $\ell \leq \pi r$. □

Nos corolários que se seguem, usaremos alguns fatos sobre o grupo fundamental e os espaços de recobrimento (v. Massey [Ma], Caps. 2 e 5).

3.2 Corolário. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $\mathrm{Ric}_p(v) \geq \delta > 0$, para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p(M)$. Então, o recobrimento universal de M é compacto. Em particular, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.*

Pois, introduzindo no recobrimento universal $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ a métrica do recobrimetno (isto é, a métrica tal que π é uma isometria local), concluimos que $\widetilde{M}$ é completa e que sua curvatura de Ricci satisfaz $\widetilde{\mathrm{Ric}}_p \geq \delta > 0$. Pelo teorema, $\widetilde{M}$ é compacta. Logo o número de folhas de recobrimento é finito; como este é o número dos elementos do grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M, concluimos que $\pi_1(M)$ é finito.

3.3 Corolário. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \geq \frac{1}{r^2} > 0$. Então M é compacta,* $\mathrm{diam}(M) \leq \pi r$ *e $\pi_1(M)$ é finito.*

3.4 Observação. A hipótese $K \geq \delta > 0$ não pode ser enfraquecida para $K > 0$. Com efeito, o parabolóide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$$

tem curvatura $K > 0$, é completo e não compacto.

3.5 Observação. Em verdade não é necessário que K seja limitado de zero mas apenas que K não se aproxime de zero muito rapidamente. A este respeito, veja E. Calabi, "On Ricci curvatures and geodesics", Duke Math. J. 34 (1967), 667-676 and R. Schneider, "Konvexe Flächen mit langsam abnehmender Krümmung", Archiv der Math. 23 (1972), 650-654.

3.6 Observação. A estimativa para o diâmetro dada pelo Teorema 3.1 não pode ser melhorada. Com efeito, a esfera unitária

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante igual a 1 (logo curvatura de Ricci também constante igual a 1) e $\text{diam}(S^n) = \pi$. Um resultado surpreendente é que este exemplo é único no seguinte sentido: *Seja M^n completa com $\text{Ric}_p(v) \geq 1/r^2$, para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$; se $\text{diam}(M) = \pi r$, então M^n é isométrica à esfera S^n de curvatura $1/r^2$* (v. S.Y. Cheng, "Eigenvalues comparison theorems and its geometric applications", Math. Z. 143 (1975), 289-297 e, para uma outra prova, K. Shiohama, "A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature", Trans. A.M.S. 275 (1983), 811-819).

Uma outra aplicação da fórmula da segunda variação é o teorema abaixo, devido essencialmente a A. Weinstein. Uma situação especial do teorema (que apresentaremos no Corolário 3.10) havia sido demonstrada anteriormente por Synge.

3.7 Teorema (Weinstein [We 2] e Synge [Sy]). *Seja f uma isometria de uma variedade Riemanniana M^n, orientada e compacta. Suponhamos que M possui curvatura seccional positiva e que f preserva a orientação de M se n é par, e reverte-a se n é ímpar. Então f possui um ponto fixo, i.e., existe $p \in M$ com $f(p) = p$.*

Na demonstração do Teorema 3.7 precisaremos do seguinte resultado de Álgebra Linear.

3.8 Lema. *Seja A uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^{n-1}$ e suponha que $\det A = (-1)^n$. Então A deixa invariante algum vetor de $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Demonstração do Lema: Se n é par, $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio real em λ de grau ímpar $(= n-1)$. Portanto existem valores próprios reais de A. Como A é ortogonal, tais valores próprios são ± 1. Como o produto dos valores próprios complexos de A é não negativo, e $\det A = 1$, pelo menos um dos valores próprios de A é 1. Isto demonstra o Lema neste caso.

Se n é ímpar, $\det A = -1$. Como o produto dos valores próprios complexos é não negativo, existe pelo menos um par de valores próprios reais, um dos quais é positivo, donde igual a 1. □

Demonstração do Teorema 3.7: Suponhamos, por absurdo, que $f(q) \neq q$ para todo $q \in M$. Seja $p \in M$ tal que $d(p, f(p))$ é um mínimo. Como M é completa, existe uma geodésica minimizante normalizada $\gamma\colon [0, \ell] \to M$, ligando p a $f(p)$, isto é, $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = f(p)$.

Seja $\widetilde{A} = P \circ df_p\colon T_p(M) \to T_p(M)$, onde P é o transporte paralelo ao longo de γ de $f(p) = \gamma(\ell)$ a p. Então $\widetilde{A}$ é uma isometria. Vamos mostrar que

$$(f \circ \gamma)'(0) = \gamma'(\ell).$$

De fato, consideremos a geodésica $f \circ \gamma$ que liga $f(p)$ a $f^2(p)$. Seja $p' = \gamma(t')$, $t' \neq 0$, $t' \neq \ell$, e $f(p') = f \circ \gamma(t')$.

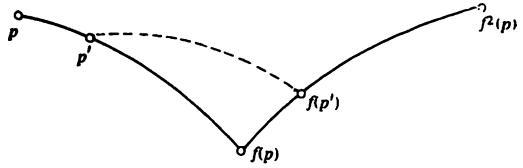


Figura 2

Como f é uma isometria, $d(p, p') = d(f(p), f(p'))$ e, pela desigualdade triangular (v. Fig. 2),

$$\begin{aligned} d(p', f(p')) &\leq d(p', f(p)) + d(f(p), f(p')) \\ &= d(p', f(p)) + d(p, p') \\ &= d(p, f(p)). \end{aligned}$$

Como $d(p, f(p))$ é um mínimo,

$$d(p', f(p')) = d(p', f(p)) + d(f(p), f(p')).$$

Portanto, a curva formada por γ e $f \circ \gamma$ é uma geodésica, donde

$$(f \circ \gamma)'(0) = \gamma'(\ell),$$

como havíamos afirmado.

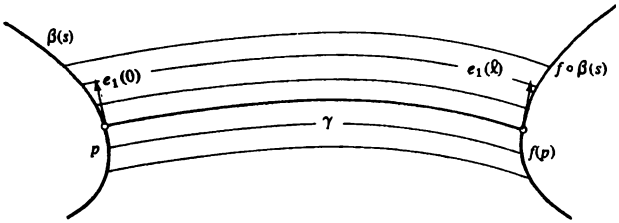


Figura 3

Decorre daí que $\widetilde{A}$ deixa $\gamma'(0)$ fixo, pois

$$\widetilde{A}(\gamma'(0)) = P \circ df_p(\gamma'(0)) = P((f \circ \gamma)'(0)) = P(\gamma'(\ell)) = \gamma'(0).$$

Seja A a restrição de $\widetilde{A}$ ao complemento ortogonal de $\gamma'(0)$. Então A é ortogonal em $\mathbb{R}^{n-1}$ e, como P é uma isometria que preserva orientação,

$$\det A = \det \widetilde{A} = \det(P \circ df_p) = (-1)^n,$$

onde na última igualdade usamos a hipótese sobre f e o fato que P preserva orientação. Pelo lema, A deixa um vetor invariante. Seja $e_1(t)$ um campo unitário paralelo ao longo de γ tal que, para cada t, $e_1(t)$ pertence ao complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ e $e_1(0)$ é invariante por A.

Seja $\beta(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma geodésica tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = e_1(0)$. Como $P \circ df_p(e_1(0)) = e_1(0)$, temos

$$df_p(e_1(0)) = e_1(\ell),$$

isto é, a geodésica $f \circ \beta$ é tal que $f \circ \beta(0) = f(p)$ e $(f \circ \beta)'(0) = e_1(\ell)$.

Seja h uma variação de γ dada por (v. Fig. 3)

$$h(s,t) = \exp_{\gamma(t)}(se_1(t)), \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad t \in [0, \ell].$$

Observe-se que

$$h(s,\ell) = \exp_{f(p)}(se_1(\ell)) = (f \circ \beta)(s).$$

Portanto,

$$V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_{\gamma(t)}(se_1(t))\Big|_{s=0} = e_1(t),$$

donde $\frac{D^2V}{dt^2} = 0$. Utilizando a fórmula da segunda variação (veja Observação 2.9) e o fato que as curvas transversais da variação são geodésicas, obteremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}(0) &= -\int_0^\ell \left\langle V(t), R\left(\frac{d\gamma}{dt}, V\right)\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt \\ &\quad + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle(0,\ell) - \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial s}\right\rangle(0,0) \\ &= -\int_0^\ell K\left(e_1(t), \frac{d\gamma}{dt}\right) dt.\end{aligned}$$

Como a curvatura seccional é positiva,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2E}{ds^2}(0) < 0,$$

e portanto $\frac{dE}{ds}$ é estritamente decrescente numa vizinhança do zero. Como $E'(0) = 0$ e $\frac{dE}{ds}$ é decrescente numa vizinhança de zero, temos que E decresce nesta vizinhança. Isto mostra que existe uma curva c da variação, tal que $(\ell(c))^2 \leq \ell E(c) < \ell E(\gamma) = \ell(\gamma)^2$. Como as curvas da variação ligam q a $f(q)$, obtivemos uma contradição com o fato de ser $d(p, f(p))$ um mínimo. □

3.9 Observação. O teorema é verdadeiro sob a hipótese mais fraca de que f é um difeomorfismo conforme. Não se sabe se o teorema é ainda verdadeiro se f é meramente um difeomorfismo. Isto implicaria que $S^2 \times S^2$ não possui uma métrica de curvatura positiva, pois a aplicação f que é antípoda em cada fator preserva a orientação (cada fator reverte a orientação) e não possui ponto fixo. Para maiores detalhes, v. A. Weinstein [We 2].

3.10 Corolário (Synge). *Seja M^n uma variedade compacta com curvatura seccional positiva.*

a) *Se M^n é orientável e n é par, então M é simplesmente conexa.*

b) *Se n é ímpar, então M é orientável.*

Demonstração: a) Seja $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ o recobrimento universal de M. Introduza em $\widetilde{M}$ a métrica do recobrimento, e oriente $\widetilde{M}$ de modo que π preserve a orientação. Como M é compacta e tem curvatura positiva, então $K \geq \delta > 0$. Pelo fato de ser π uma isometria local, o mesmo se passa com $\widetilde{M}$. Como $\widetilde{M}$ é completa, pelo Corolário 3.3., $\widetilde{M}$ é compacta. Seja $k\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ uma transformação de recobrimento de $\widetilde{M}$, isto é, $\pi \circ k = \pi$ (v. Massey [Ma], pg. 159). Então k é uma isometria de $\widetilde{M}$ que, pela maneira como orientamos $\widetilde{M}$, preserva a orientação. Como n é par, podemos usar o teorema para concluir que k tem um ponto fixo. Mas uma transformação de recobrimento que possui um ponto fixo é a identidade. Segue-se daí que o grupo das transformações de recobrimento de $\widetilde{M}$ (que é isomorfo ao grupo fundamental de M; v. Massey [Ma], pg. 163) reduz-se à identidade. Logo M é simplesmente conexa.

b) Suponhamos que M não é orientável, e consideremos o recobrimento duplo orientável $\overline{M}$ de M (v. Exerc. 12 do Cap. 0). Introduzamos em $\overline{M}$ a métrica do recobrimento. Como recobrimento duplo de uma variedade compacta, $\overline{M}$ é compacta. Seja k uma transformação de recobrimento de $\overline{M}$, $k \neq \mathrm{id}$. Como M é não orientável, k é uma isometria que reverte a orientação de $\overline{M}$. Como n é ímpar, podemos aplicar o Teorema 3.7 e garantir que k posssui um ponto fixo. Logo $k = \mathrm{id}$., o que é uma contradição. □

3.11 Observação. O espaço projetivo real $P^2(\mathbb{R})$ de dimensão dois, que é compacto, não-orientável e não simplesmente conexo é um exemplo que mostra a necessidade da orientabilidade em a) e da dimensão ímpar em b). Por outro lado, $P^3(\mathbb{R})$ que é compacto, orientável e não simplesmente conexo é um exemplo que mostra a necessidade da dimensão par em (a).

Exercícios

1. Seja M uma variedade Riemanniana completa, e seja $N \subset M$ uma subvariedade fechada de M. Seja $p_0 \in M$, $p_0 \notin N$, e seja $d(p_0, N)$ a distância de p_0 a N. Mostre que existe um ponto $q_0 \in N$ tal que $d(p_0, q_0) = d(p_0, N)$ e que qualquer geodésica minimizante que liga p_0 a q_0 é ortogonal a N em q_0.

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ uma métrica Riemanniana completa, Prove que
$$\lim_{r\to\infty} \Big(\inf_{x^2+y^2\geq r^2} K(x,y)\Big) \leq 0,$$
onde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $K(x,y)$ é a curvatura Gaussiana da métrica dada em (x,y).

3. Prove a seguinte generalização do Teorema de Bonnet-Myers: Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Suponha que existem constantes $a > 0$ e $c \geq 0$ tais que para todo par de pontos em M^n e toda geodésica minimizante $\gamma(s)$ ligando estes pontos e parametrizada pelo comprimento de arco s, se tenha
$$\mathrm{Ric}(\gamma'(s)) \geq a + \frac{df}{ds}, \quad \text{ao longo de } \gamma,$$
onde f é uma função de s, satisfazendo $|f(s)| \leq c$ ao longo de γ. Então M^n é compacta.
Calcule uma estimativa para o diâmetro de M^n, e observe que se $f \equiv 0$ e $c = 0$, obtém-se o Teorema de Bonnet-Myers.
O resulado acima tem aplicações à Relatividade, v. G.J. Galloway, "A generalization of Myers Theorem and an application to relativistic cosmology", J. Diff. Geometry, 14 (1979), 105-116.

4. Seja M^n uma variedade Riemanniana orientável de curvatura positiva e dimensão par. Seja γ uma geodésica fechada de M, isto é, γ é uma imersão do círculo S^1 em M

que é geodésica em todos os seus pontos. Prove que γ é homotópica a uma curva fechada cujo comprimento é estritamente menor do que γ.
Sugestão: O transporte paralelo ao longo da curva fechada γ deixa um vetor ortogonal a γ invariante (isto provém da orientabilidade de M e do fato da dimensão ser par). Portanto existe um vetor $V(t)$ paralelo ao longo da curva fechada γ. Calcule $E''_V(0)$ e mostre que ela é estritamente negativa. Logo, próximo de γ, existe uma curva fechada de menor comprimento do que γ.

5. Sejam N_1 e N_2 duas subvariedades fechadas e disjuntas de uma variedade Riemanniana compacta.

   a) Mostre que a distância entre N_1 e N_2 é realizada por uma geodésica γ perpendicular a ambas N_1 e N_2.

   b) Mostre que, para qualquer variação ortogonal $h(t,s)$ de γ, com $h(0,s) \in N_1$ e $h(\ell,s) \in N_2$, tem-se para a fórmula da segunda variação a seguinte expressão

$$\frac{1}{2}E''(0) = I_\ell(V,V)$$

$$+\left\langle V(\ell), S^{(2)}_{\gamma'(\ell)}V(\ell)\right\rangle - \left\langle V(0), S^{(1)}_{\gamma'(0)}(V(0))\right\rangle$$

   onde V é o vetor variacional e $S^{(i)}_{\gamma'}$ é a aplicação linear associada à segunda forma fundamental de N_i na direção de γ', $i = 1, 2$.

6. Seja $\widetilde{M}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura $K \leq 0$. Seja $\gamma\colon (-\infty,\infty) \to \widetilde{M}$ uma geodésica normalizada e seja $p \in \widetilde{M}$ um ponto que não pertence a γ. Seja $d(s) = d(p,\gamma(s))$.

   a) Considere a geodésica minimizante $\sigma_s\colon [0,d(s)] \to \widetilde{M}$ ligando p a $\gamma(s)$, isto é, $\sigma_s(0) = p$, $\sigma_s(d(s)) = \gamma(s)$. considere a variação $h(t,s) = \sigma_s(t)$, e mostre que:

(i) $\frac{1}{2}E'(s) = \langle \gamma'(s), \sigma_s'(d(s)) \rangle$,

(ii) $\frac{1}{2}E''(s) > 0$.

b) Conclua de (i) que s_0 é um ponto crítico de d se e só se $\langle \gamma'(s_0), \sigma'(d(s_0)) \rangle = 0$. Conclua de (ii) que d possui uma único ponto crítico, que é um mínimo.

c) De (b) conclui-se que se $\widetilde{M}$ é completa, simplesmente conexa e tem curvatura $K \leq 0$, então de um ponto fora de uma geodésica γ de $\widetilde{M}$ pode se traçar uma única perpendicular a γ. Dê exemplos mostrando que a condição sobre a curvatura e a condição de conexão simples são essenciais ao resultado.

Capítulo X

O Teorema de Comparação de Rauch

1 Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana. Como vimos no Capítulo V, se $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ é uma geodésica normalizada e J é um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, $|J'(0)| = 1$ e $\langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = 0$, então

$$|J(t)| = t - \frac{K}{6}\, t^3 + R, \quad \lim_{t\to 0} \frac{R}{t^3} = 0,$$

onde K é a curvatura seccional em $\gamma(0)$ segundo o plano gerado por $\gamma'(0)$, $J'(0)$. Portanto, se t é pequeno, $|J(t)|$ é tanto maior quanto menor for K. Consideremos agora uma outra variedade Riemanniana $\widetilde{M}$, uma geodésica normalizada $\tilde{\gamma}\colon [0,\ell] \to \widetilde{M}$ e um campo de Jacobi $\widetilde{J}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$ satisfazendo: $\widetilde{J}(0) = 0$, $|\widetilde{J}'(0)| = 1$, $\langle \widetilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle = 0$. Suponhamos que

$$\widetilde{K}(\tilde{\gamma}'(0), \widetilde{J}'(0)) \geq K(\gamma'(0), J'(0)).$$

Decorre da expressão acima que, para t pequeno, $|\widetilde{J}(t)| \leq |J(t)|$.

O Teorema de Rauch, que pretendemos demonstrar neste capítulo, fornece condições para que a desigualdade acima seja válida sem a restrição de ser t pequeno. Mais precisamente, o teorema afirma (v. enunciado na Seção 2) que se $\tilde{\gamma}\colon [0,\ell] \to \widetilde{M}$ não possui pontos conjugados e

$$\widetilde{K}(\tilde{\gamma}'(t), \widetilde{J}(t)) \geq K(\gamma'(t), J(t)), \quad t \in (0,\ell),$$

então $|\widetilde{J}(t)| \leq |J(t)|$.

O Teorema de Rauch é um dos fatos fundamentais em Geometria Riemanniana. Intuitivamente, ele exprime o fato plausível que se as curvaturas aumentam, os comprimentos diminuem.

Em dimensão dois, um tal teorema é uma conseqüência fácil de um resultado clássico de Sturm sobre equações diferenciais ordinárias. Com efeito, neste caso, as equações de Jacobi para $J = fe_2$, $\widetilde{J} = \tilde{f}\tilde{e}_2$ ($e_2(t)$ e $\tilde{e}_2(t)$ são campos unitários paralelos ao longo de e normais às geodésicas $\gamma(t)$ e $\tilde{\gamma}(t)$, respectivamente) se escrevem:

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0, \quad f(0) = 0, \quad t \in [0,\ell]$$
$$\tilde{f}''(t) + \widetilde{K}(t)\tilde{f}(t) = 0, \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad t \in [0,\ell].$$

O Teorema de Sturm afirma que se $f'(0) = \tilde{f}'(0) > 0$, $\tilde{f}(t) \neq 0$ em $(0,\ell]$, e $\widetilde{K}(t) \geq K(t)$, então $\tilde{f}(t) \leq f(t)$ (v. Fig. 1 e o Exercício 5 deste capítulo).

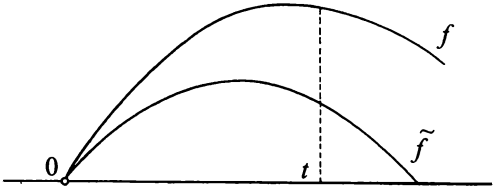


Figura 1

Em dimensão maior do que dois, a demonstração é muito menos simples, e uma apresentação do resultado foi feita pela

primeira vez em 1951 por Rauch [R 1] (para outra exposição, v. Rauch [R 3]). A demonstração que apresentamos na Seção 2 é uma elaboração devida a vários matemáticos na década dos 50, entre os quais devemos mencionar Ambrose e Singer.

Na Seção 3, faremos uma aplicação das idéias do Teorema de Rauch à teoria das imersões isométricas. Na Seção 4, introduziremos a noção de ponto focal, que generaliza a noção de ponto conjugado, e estenderemos o Teorema de Rauch a esta situação. Estas duas últimas seções não serão usadas no resto do livro e podem ser omitidas em uma primeira leitura.

2 O Teorema de Rauch

Na demonstração do Teorema de Rauch, teremos necessidade de um certo número de fatos que estabeleceremos agora em forma de lemas. O lema do Índice (Lema 2.2) é um fato básico que tem aplicações em muitas outras situações.

O lema seguinte é um caso particular do Lema 5.5 do Capítulo 0.

2.1 Lema. *Seja* $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável com* $h(0) = 0$. *Então existe uma função diferenciável* $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *com* $\phi(0) = \frac{dh}{dt}(0)$, $h(t) = t\phi(t)$, $t \in [0,1]$.

Seja M uma variedade Riemanniana e $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica de M. Seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ. Para todo $t_0 \in [0,a]$, escreveremos

$$\int_0^{t_0} \{\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\} dt = I_{t_0}(V,V).$$

Admitamos que $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ para todo t, $0 < t \leq t_0$. O Lema do Índice abaixo afirma que para todos os campos de vetores diferenciáveis por partes ao longo de γ que se anulam em $t = 0$ e coincidem em $t = t_0$, o mínimo da expressão acima é atingido pelo campo de Jacobi que se anula em

$t = 0$ e assume o valor comum em $t = t_0$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado fundamental.

2.2 Lema (do Índice). *Seja* $\gamma\colon [0,a] \to M$ *uma geodésica sem pontos conjugados a* $\gamma(0)$ *no intervalo* $(0,a]$. *Seja* J *um campo de Jacobi ao longo de* γ, *com* $\langle J, \gamma' \rangle = 0$, *e seja* V *um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de* γ, *com* $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. *Suponhamos que* $J(0) = V(0) = 0$ *e que* $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (0,a]$. *Então*

$$I_{t_0}(J,J) \leq I_{t_0}(V,V)$$

e a igualdade ocorre se e só se $V = J$ *em* $[0,t_0]$.

Demonstração: O espaço vetorial $\mathcal{J}^{\perp}$ dos campos de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ tem dimensão $n-1$, onde $n = \dim M$. Seja $\{J_1, \ldots, J_{n-1}\}$ uma base para este espaço. Então $J = \sum_i \alpha_i J_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, onde os α_i são constantes. Como não existem pontos conjugados no intervalo $(0,a]$, para todo $t \neq 0$, os vetores $J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)$ formam uma base do complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)}(M)$. Portanto, para $t \neq 0$, podemos escrever

$$V(t) = \sum_i f_i(t) J_i(t),$$

onde f_i são funções diferenciáveis por partes em $(0,a]$. Vamos mostrar que f_i pode ser estendida contínua e diferenciavelmente a $t = 0$, isto é, f_i é diferenciável por partes em $[0,a]$.

Para isto, escreva pelo Lema 2.1, $J_i(t) = t\,A_i(t)$. Então $A_i(0) = J_i'(0)$, donde os $A_i(0)$ são linearmente independentes. Portanto, os $A_i(t)$ são linearmente independentes para todo $t \in [0,a]$, e podemos escrever $V(t) = \sum_i g_i(t) A_i(t)$ onde os g_i são funções diferenciáveis por partes em $[0,a]$ e $g_i(0) = 0$. Aplicando de novo o Lema 2.1, temos que $g_i(t) = t h_i(t)$, onde os $h_i(t)$ são diferenciáveis por partes em $[0,a]$. Como para $t \neq 0$, $f_i(t) = h_i(t)$, concluímos o afirmado.

Vamos agora mostrar que, no interior de cada subintervalo

onde f_i é diferenciável,

$$(1) \qquad \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle = \Big\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j' J_j \Big\rangle + \frac{d}{dt} \Big\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle.$$

Com efeito, como

$$R(\gamma', V)\gamma' = R\big(\gamma', \sum_i f_i J_i\big)\gamma' = \sum_i f_i R(\gamma', J_i)\gamma' = -\sum_i f_i J_i'' ,$$

teremos

$$\begin{aligned}
&\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle \\
&\quad = \Big\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j + \sum_j f_j J_j' \Big\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle \\
&\quad = \Big\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j' J_j \Big\rangle + \Big\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle \\
&\qquad + \Big\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j \Big\rangle + \Big\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle \\
&\qquad + \Big\langle \sum_i f_i J_i'' , \sum_j f_j J_j \Big\rangle .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Big\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle &= \Big\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' + \sum_j f_j J_j'' \Big\rangle \\
&= \Big\langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle + \Big\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j J_j' \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j'' \Big\rangle + \Big\langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' \Big\rangle .
\end{aligned}$$

Portanto, para provar (1), basta mostrar que

$$\langle \sum_i f_i J_i' , \sum_j f_j' J_j \rangle = \langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j' J_j' \rangle. \tag{2}$$

Para provar (2), escreveremos

$$h(t) = \langle J_i', J_j \rangle - \langle J_i, J_j' \rangle;$$

como $h(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} h'(t) &= \langle J_i'', J_j \rangle + \langle J_i', J_j' \rangle - \langle J_i', J_j' \rangle - \langle J_i, J_j'' \rangle \\ &= -\langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_j \rangle + \langle J_i, R(\gamma', J_j)\gamma' \rangle = 0 \end{aligned}$$

concluímos que $h(t) \equiv 0$. Por distributividade, se obtém então (2), o que conclui a demonstração de (1).

Aplicando (1) a V e J, obteremos, respectivamente:

$$I_{t_0}(V,V) = \langle \sum_i f_i J_i , \sum_j f_j J_j' \rangle(t_0) + \int_0^{t_0} \langle \sum_i f_i' J_i , \sum_j f_j' J_j \rangle dt,$$

$$I_{t_0}(J,J) = \langle \sum_i \alpha_i J_i , \sum_j \alpha_j J_j' \rangle(t_0).$$

Como $J(t_0) = V(t_0)$, temos que $\alpha_i = f_i(t_0)$, donde

$$I_{t_0}(V,V) = I_{t_0}(J,J) + \int_0^{t_0} \left| \sum_i f_i' J_i \right|^2 dt. \tag{3}$$

Decorre de (3) que $I_{t_0}(V,V) \geq I_{t_0}(J,J)$, o que demonstra a primeira parte do lema. Se $I_{t_0}(V,V) = I_{t_0}(J,J)$, então $\sum_i f_i' J_i = 0$. Como os J_i são linearmente independentes para $t \neq 0$, concluímos, por continuidade, que $f_i' = 0$, para todo i e para todo $t \in [0, t_0]$. Portanto, $f_i = \text{const.}$, e como $f_i(t_0) = \alpha_i$, concluímos que $f_i(t) = \alpha_i$, isto é, $V = J$, como queríamos. □

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema de Rauch. No que se segue M^n indicará uma variedade de dimensão n.

2.3 Teorema (Rauch). *Sejam* $\gamma\colon [0,a] \to M^n$ *e* $\tilde{\gamma}\colon [0,a] \to \widetilde{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, *geodésicas com a mesma velocidade (i.e.,* $|\gamma'(t)| = |\tilde{\gamma}'(t)|$*), e sejam* J *e* $\widetilde{J}$ *campos de Jacobi ao longo de* γ *e* $\tilde{\gamma}$, *respectivamente, tais que*

$$J(0) = \widetilde{J}(0) = 0, \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \widetilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle,$$
$$|J'(0)| = |\widetilde{J}'(0)|.$$

Admita que $\tilde{\gamma}$ *não possui pontos conjugados em* $(0,a]$ *e que, para todo* t *e todo* $x \in T_{\gamma(t)}(M)$, $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}(\widetilde{M})$, *tem-se*

$$\widetilde{K}(\tilde{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(x, \gamma'(t)),$$

onde $K(x,y)$ *indica a curvatura seccional segundo o plano gerado por* x *e* y. *Então*

$$|\widetilde{J}| \leq |J|.$$

Além disto, se para algum $t_0 \in (0,a]$, *tem-se* $|\widetilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, *então* $\widetilde{K}(\widetilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = K(J(t), \gamma'(t))$, *para todo* $t \in [0, t_0]$.

Demonstração: Observe que, pela Proposição 3.6 do Capítulo V, a condição $\langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \widetilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle$ é equivalente (em presença de $J(0) = \widetilde{J}(0) = 0$) à condição $\langle J, \gamma'\rangle = \langle \widetilde{J}, \tilde{\gamma}'\rangle$. Além disto, como

$$\langle J, \gamma'\rangle\gamma' = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t\gamma' + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle\gamma',$$

as componentes tangentes de J e $\widetilde{J}$ têm, pelas hipóteses, o mesmo comprimento. Portanto, podemos supor que

$$\langle J, \gamma'\rangle = 0 = \langle \widetilde{J}, \tilde{\gamma}'\rangle.$$

Se $|J'(0)| = |\widetilde{J}'(0)| = 0$, então $|J| = |\widetilde{J}| = 0$. Caso contrário, façamos $|J(t)|^2 = v(t)$ e $|\widetilde{J}(t)|^2 = \tilde{v}(t)$. Como $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados em $(0,a]$, $\frac{v(t)}{\tilde{v}(t)}$ está bem definido para $t \in (0,a]$. Pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{t\to 0} \frac{v(t)}{\tilde{v}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{v''(t)}{\tilde{v}''(t)} = \frac{|J'(0)|^2}{|\widetilde{J}'(0)|^2} = 1.$$

Portanto, para provar que $|\widetilde{J}| \leq |J|$, basta provar que $\frac{d}{dt}\left(\frac{v(t)}{\tilde{v}(t)}\right) \geq 0$. Isto equivale a provar que $v'\tilde{v} \geq v\tilde{v}'$.

Para provar o pedido, fixemos $t_0 \in (0, a]$. Se $v(t_0) = 0$ temos que

$$v'(t_0) = 2\langle J'(t_0), J(t_0)\rangle = 0,$$

e a desigualdade é satisfeita trivialmente. Suponhamos, portanto, que $v(t_0) \neq 0$. Façamos

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{v(t_0)}}\, J(t), \quad \widetilde{U}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}(t_0)}}\, \widetilde{J}(t),$$

e observemos que

$$\begin{aligned}\frac{v'(t_0)}{v(t_0)} &= \frac{2\langle J'(t_0), J(t_0)\rangle}{\langle J(t_0), J(t_0)\rangle} = 2\langle U'(t_0), U(t_0)\rangle = \langle U, U\rangle'(t_0) \\ &= \int_0^{t_0} \langle U, U\rangle''\, dt = 2\int_0^{t_0} \left\{\langle U', U'\rangle - \langle U, R(\gamma', U)\gamma'\rangle\right\} dt \\ &= 2I_{t_0}(U, U).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\tilde{v}'(t_0)}{\tilde{v}(t_0)} = 2I_{t_0}(\widetilde{U}, \widetilde{U}).$$

Pela arbitrariedade de t_0, bastará, portanto, provar que $I_{t_0}(\widetilde{U}, \widetilde{U}) \leq I_{t_o}(U, U)$ para concluir a demonstração da desigualdade.

Para isto, sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+k}\}$ bases paralelas e ortonormais ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, tais que:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \gamma'(t)/|\gamma'(t)|, \quad e_2(t_0) = U(t_0), \\ \tilde{e}_1(t) &= \tilde{\gamma}'(t)/|\tilde{\gamma}'(t)|, \quad \tilde{e}_2(t_0) = \widetilde{U}(t_0).\end{aligned}$$

A cada campo de vetores $V(t) = \sum_i g_i(t)e_i(t)$ ao longo de γ façamos corresponder o campo ϕV ao longo de $\tilde{\gamma}$ dado por

$$(\phi V)(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

A aplicação ϕ, assim definida, satisfaz às seguintes propriedades:

$$\langle \phi V_1, \phi V_2 \rangle = \langle V_1, V_2 \rangle \tag{4}$$

$$(\phi V)' = \phi(V'). \tag{5}$$

Decorre daí, da hipótese sobre as curvaturas e do fato das geodésicas terem a mesma velocidade, que

$$I_{t_0}(\phi(U), \phi(U)) \leq I_{t_0}(U, U).$$

Observe agora que $\widetilde{U}$ e $\phi(U)$ são campos de vetores ao longo de $\tilde{\gamma}$ que satisfazem às hipóteses do Lema 2.2, e que $\widetilde{U}$ é um campo de Jacobi. Pelo Lema 2.2,

$$I_{t_0}(\widetilde{U}, \widetilde{U}) \leq I_{t_0}(\phi(U), \phi(U)) \leq I_{t_0}(U, U),$$

o que demonstra a desigualdade do Teorema.

Suponhamos agora que $|J(t_0)| = |\widetilde{J}(t_0)|$, para algum $t_0 \in (0, a]$. Para todo $t \neq 0$, temos $I_t(\widetilde{U}, \widetilde{U}) \leq I_t(U, U)$, e, portanto, $v'\tilde{v}(t) \geq v\tilde{v}'(t)$. Como $|J(t_0)| = |\widetilde{J}(t_0)|$, então

$$v'\tilde{v}(t) = v\tilde{v}'(t), \quad t \in (0, t_0],$$

donde as desigualdades acima são igualdades para $t \in (0, t_0]$, i.e.,

$$I_t(\phi(U), \phi(U)) = I_t(U, U), \quad t \in (0, t_0].$$

Como ϕ satisfaz (4) e (5), concluímos da igualdade acima e da hipótese sobre as curvaturas que $K(J(t), \gamma'(t)) = \widetilde{K}(\widetilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t))$, para $t \in (0, t_0]$, donde, por continuidade, para $t \in [0, t_0]$, como havíamos afirmado. □

Uma aplicação imediata do Teorema de Rauch permite obter informações sobre as posições dos pontos conjugados a partir de limitações na curvatura.

2.4 Proposição *Suponha que a curvatura seccional K de uma variedade Riemanniana M satisfaz às desigualdades*

$$0 < L \leq K \leq H,$$

onde H e L são constantes. Seja γ uma geodésica de M. Então, a distância d ao longo de γ entre dois pontos conjugados consecutivos de γ satisfaz

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Demonstração: Para obter a desigualdade $d \geq \pi/\sqrt{H}$, basta comparar a variedade M^n com a esfera $S^n(H)$ de curvatura H. Seja $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ uma geodésica normalizada de M com $\gamma(0) = p$, e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Escolha um ponto $\tilde{p} \in S^n(H)$ e uma geodésica normalizada $\tilde{\gamma}\colon [0,\ell] \to S^n(H)$ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$. Seja $\widetilde{J}$ um campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\widetilde{J}(0) = 0$, $\langle \widetilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$, $|\widetilde{J}'(0)| = |J'(0)|$. Como $\tilde{\gamma}$ não tem pontos conjugados no intervalo $(0, \pi/\sqrt{H})$, pelo Teorema de Rauch, $|J(t)| \geq |\widetilde{J}(t)| > 0$, $t \in (0, \pi/\sqrt{H})$. Portanto, a distância d de p ao seu primeiro ponto conjugado satisfaz $d \geq \pi/\sqrt{H}$.

Para obter a desigualdade $d \leq \pi/\sqrt{L}$, faremos uma comparação análoga com a esfera $S^n(L)$ de dimensão n e curvatura constante L. Se $d > \pi/\sqrt{L}$, o Teorema de Rauch se aplica, donde $S^n(L)$ só tem pontos conjugados depois de $\pi/\sqrt{L}$, o que é absurdo. Logo $d \leq \pi/\sqrt{L}$. □

Uma das típicas aplicações do Teorema de Rauch consiste em estimar comprimento de curvas em uma variedade Riemanniana da qual possuímos uma estimativa para a curvatura. A proposição abaixo é um exemplo desta situação.

2.5 Proposição. *Sejam M^n e $\widetilde{M}^n$ variedades Riemannianas e suponhamos que para todo $p \in M$, $\tilde{p} \in \widetilde{M}$, $\sigma \subset T_pM$, $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$, se tenha que $\widetilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\sigma}) \geq K_p(\sigma)$. Sejam $p \in M$, $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ e fixe uma isometria linear $i\colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$. Seja $r > 0$ tal que a restrição $\exp_p | B_r(0)$ seja um difeomorfismo e $exp_{\tilde{p}} | \widetilde{B}_r(0)$ seja não-singular. Seja $c\colon [0,a] \to \exp_p(B_r(0)) \subset M$ uma curva diferenciável e defina uma curva $\tilde{c}\colon [0,a] \to \exp_{\tilde{p}}(\widetilde{B}_r(0)) \subset \widetilde{M}$ por*

$$\tilde{c}(s) = \exp_{\tilde{p}} \circ\, i \circ \exp_p^{-1}(c(s)), \quad s \in [0,a].$$

Então $\ell(c) \geq \ell(\tilde{c})$.

Demonstração: Considere a curva $\bar{c}(s) = \exp_p^{-1} c(s)$ em T_pM. Para s fixo, considere a geodésica radial $\gamma_s(t) = \exp_p t\bar{c}(s)$. A aplicação

$$f(t,s) = \gamma_s(t), \quad 0 \leq s \leq a, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

é uma superfície parametrizada (v. Fig. 2). Logo, para todo s, $\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = J_s(t)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ_s, com $J_s(0) = 0$, $J_s(1) = \frac{\partial f}{\partial s}(1,s) = c'(s)$. Além disso,

$$\frac{DJ_s}{dt}(0) = \frac{D}{dt}\{(d\exp_p)_{t\gamma_s'(0)}(t\bar{c}'(s))\}\Big|_{t=0} = \bar{c}'(s).$$

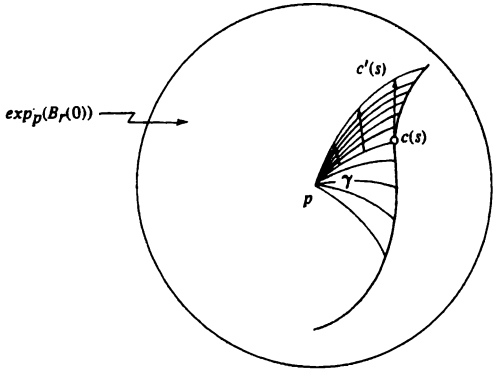


Figura 2

Considere agora a superfície parametrizada $\tilde{f}(t,s)$ em $\widetilde{M}$ dada por

$$\tilde{f}(t,s) = exp_{\tilde{p}} ti(\bar{c}(s)) = \tilde{\gamma}_s(t),$$

e observe que $\tilde{\gamma}_s$ é uma geodésica. Então o campo de Jacobi $\widetilde{J}_s(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)$ satisfaz

$$\widetilde{J}_s(0) = 0, \quad \widetilde{J}_s(1) = \tilde{c}'(s), \quad \frac{D\widetilde{J}_s}{dt}(0) = i\bar{c}'(s).$$

Como i é uma isometria,

$$|J_s(0)| = |\widetilde{J}_s(0)| = 0, \quad |J_s'(0)| = |\widetilde{J}_s'(0)|$$

e

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{J}_s'(0), \tilde{\gamma}_s'(0)\rangle &= \langle i\tilde{c}'(s), i\gamma_s'(0)\rangle \\ &= \langle \tilde{c}'(s), \gamma_s'(0)\rangle = \langle J_s'(0), \gamma_s'(0)\rangle.\end{aligned}$$

Podemos, portanto, aplicar o Teorema de Rauch e concluir que

$$|\tilde{c}'(s)| = |\widetilde{J}_s(1)| \leq |J_s(1)| = |c'(s)|,$$

donde, por integração, $\ell(c) \geq \ell(\tilde{c})$. □

2.6 Observação. Os métodos utilizados no Teorema de Rauch podem ser empregados para obter uma limitação superior para o volume de uma bola normal de uma variedade Riemanniana cuja curvatura de Ricci seja limitada inferiormente. Mais precisamente, seja M uma variedade Riemanniana completa tal que $\mathrm{Ric}_M \geq H$, e sejam $B_r(p) \subset M$, $B_r(\tilde{p}) \subset \widetilde{M}(H)$ bolas normais de raio r, onde $\widetilde{M}(H)$ é a variedade completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante H. Então

$$\mathrm{vol}(B_r(p)) \leq \mathrm{vol}\, B_r(\tilde{p}),$$

e, se a igualdade se verifica, $\mathrm{Ric}_M(\gamma'(t)) \equiv H$, para todo $t < r$ e toda geodésica radial normalizada $\gamma(t)$ em $B_r(p)$ (v. Bishop e Crittenden, Geometry of Manifolds, Academic Press, 1964, pg. 256 e K. Tenenblat, On the Rauch comparison theorem for volumes, Bol. Soc. Bras. Mat. 4 (1973), 31-39).

É curioso observar que, diferentemente do Teorema de Rauch, o resultado acima não se estende para o caso $\mathrm{Ric}_M \leq L$; um contra-exemplo é descrito no artigo acima citado de K. Tenenblat.

2.7 Observação. A relação entre curvatura de Ricci e volume pode ser estendida ao teorema global seguinte: Com as mesmas

notações da Obs. 2.6, suponhamos que $\mathrm{Ric}_M \geq H$ e indiquemos por $V_r = \mathrm{vol}\, B_r(p)$, $\tilde{V}_r = \mathrm{vol}\, B_r(\tilde{p})$, onde r é agora um número real positivo arbitrário. Então, para todo $R \geq r > 0$, tem-se:

$$V_r/\tilde{V}_r \geq V_R/\tilde{V}_R\,.$$

Além disto, a igualdade ocorre para $R \leq \mathrm{diam}(M)$ se e somente se $B_R(p) \subset M$ é isométrica à bola $B_R(\tilde{p}) \subset \widetilde{M}(H)$. Para uma prova, v. J. Eschenburg "Comparison theorems and hypersurfaces", Manuscripta Math. 59 (1987), 295-323. Esta referência contém uma exposição dos teoremas de comparação sob um ponto de vista diferente do apresentado aqui; em particular, o resultado acima é utilizado para estabelecer o teorema de unicidade mencionado na Obs. 3.6 do Capítulo IX.

3 Aplicação do Lema do Índice à teoria das imersões

Nesta Seção, faremos uma aplicação do Lema do Índice à teoria das imersões isométricas. Demonstraremos o seguinte resultado, que generaliza resultados anteriores de Tompkins, O'Neill, e Chern-Kuiper (v. Corolários 3.4, 3.5 e Obs. 3.6 e 3.7).

3.1 Teorema (J.D. Moore, [Mo]). *Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, cujas curvaturas seccionais satisfazem:*

$$\overline{K} \leq b \leq 0.$$

Seja M uma variedade Riemanniana compacta cujas curvaturas seccionais satisfazem $K - \overline{K} \leq -b$. Se $\dim \overline{M} < 2 \dim M$, não existe uma imersão isométrica $f\colon M \to \overline{M}$.

Demonstração: Suponhamos que uma tal imersão existe, e vamos obter uma contradição. Escolha um ponto $\bar{p} \in \overline{M}$, $\bar{p} \notin f(M)$, e seja $q \in M$ tal que

$$d(f(q), \bar{p}) \geq d(f(p), \bar{p}), \quad \text{para todo} \quad p \in M.$$

Seja $U \subset M$ uma vizinhança de q onde f é um mergulho, e identifiquemos U com $f(U)$. Seja $\gamma\colon [0,\ell] \to \overline{M}$ uma geodésica minimizante de $\overline{M}$, normalizada, com $\gamma(0) = \bar{p}$, $\gamma(\ell) = q$. Usando a fórmula da primeira variação, vê-se que γ é perpendicular a U em q.

Para todo $v \in T_pM$, $|v| = 1$, considere uma curva $c(s)$ em U com $c(0) = q$, $c'(0) = v$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Seja $\tilde{c}(s) = \exp_{\bar{p}}^{-1}(c(s))$. Então, a superfície parametrizada

$$f(t,s) = \exp_{\bar{p}} \frac{t}{\ell}\tilde{c}(s), \quad t \in [0,\ell], \quad s \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$

dá origem a um campo de Jacobi $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ com $V(0) = 0$, $V(\ell) = v$ (Fig. 3). Observe que as geodésicas radiais $\gamma_s\colon t \to f(t,s)$ desta variação são mais curtas do que γ.

Precisamos do seguinte lema.

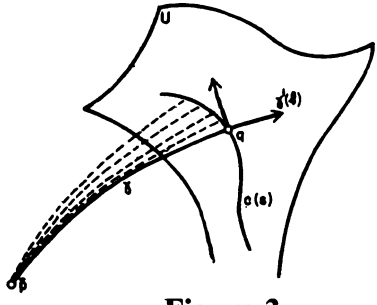


Figura 3

3.2 Lema. *Seja $E(s)$ a energia da curva $t \to f(t,s)$. Então*

$$\frac{1}{2}E''(0) = I_\ell(V,V) + \langle S_{\gamma'(\ell)}V(\ell), V(\ell)\rangle,$$

onde $S_{\gamma'(\ell)}$ é o operador linear associado à segunda forma fundamental da imersão f no ponto q segundo a normal $\gamma'(\ell)$.

Demonstração do Lema: Sabemos que (v. Obs. 2.10, Cap. IX)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E''(0) &= I_\ell(V,V) + \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle(\ell,0)\\ &= I_\ell(V,V) + \langle(\overline{\nabla}_V\overline{V})(q), \overline{N}(q)\rangle,\end{aligned}$$

onde $\overline{\nabla}$ é a derivação covariante de $\overline{M}$, e $\overline{V}$, $\overline{N}$ são extensões locais, em uma vizinhança de q, dos vetores $V(\ell)$ e $\gamma'(\ell)$, respectivamente, de modo que $\overline{V}(c(s)) = \frac{\partial f}{\partial s}(\ell, s)$. É possível escolher tais extensões de maneira que satisfaçam a condição $\langle \overline{V}, \overline{N} \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{V}, \overline{N} \rangle(q) = -\langle \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{N}, \overline{V} \rangle(q) = \langle V(\ell), S_{\gamma'(\ell)} V(\ell) \rangle,$$

donde o afirmado. □

Considere agora uma variedade Riemanniana $\widetilde{M}(b)$, com $\dim \widetilde{M}(b) = \dim \overline{M} = n$, completa e de curvatura constante b. Seja $\tilde{p} \in \widetilde{M}(b)$ um ponto arbitrário e $\tilde{\gamma}\colon [0, \ell] \to \widetilde{M}(b)$ uma geodésica normalizada com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$. Como usualmente, escolha bases ortonormais paralelas $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ de $T_{\gamma(t)}(\overline{M})$ e $\{\tilde{e}_1(t), \ldots, \tilde{e}_n(t)\}$ de $T_{\tilde{\gamma}(t)}(\widetilde{M}(b))$, tais que $e_1(0) = \gamma'(0)$ e $\tilde{e}_1(0) = \tilde{\gamma}'(0)$, e defina uma aplicação ϕ que leva um campo de vetores $W = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ao longo de γ no campo $\phi(W) = \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{e}_i$ ao longo de $\tilde{\gamma}$. É claro que $\langle \phi(W_1), \phi(W_2) \rangle = \langle W_1, W_2 \rangle$ e $(\phi(W))' = \phi(W')$. Faça $\phi(V) = \widetilde{V}$. Como $\overline{K} \leq \widetilde{K} \equiv b$, concluímos que

$$I_\ell(V, V) \geq I_\ell(\widetilde{V}, \widetilde{V}).$$

Observe que $\widetilde{V}(0) = 0$ e faça $\widetilde{V}(\ell) = \tilde{v}$.

Vamos estimar $I_\ell(\widetilde{V}, \widetilde{V})$ a fim de obter uma estimativa para $I_\ell(V, V)$.

Para estimar $I_\ell(\widetilde{V}, \widetilde{V})$, precisamos obter a expressão de um campo de Jacobi $\widetilde{J}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$, com $\widetilde{J}(0) = 0$, $\widetilde{J}(\ell) = \tilde{v}$. É um exercício simples (Cf. Exercício 4, Cap. V) verificar que $\widetilde{J}$ é dado por

$$\widetilde{J}(t) = \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-b})}{\operatorname{senh}(\ell\sqrt{-b})} \tilde{w}(t) \text{ (se } b < 0), \quad \widetilde{J}(t) = \frac{t}{\ell} \tilde{w}(t) \text{ (se } b = 0),$$

onde $\tilde{w}(t)$ é o transporte paralelo ao longo de $\tilde{\gamma}$ de

$$\tilde{w}(0) = \frac{\tilde{u}_0}{|\tilde{u}_0|}, \quad \tilde{u}_0 = \left((dexp_{\tilde{p}})_{\ell \tilde{\gamma}'(0)} \right)^{-1} (\tilde{v}).$$

Decorre daí, pela expressão de $I_\ell(\widetilde{J},\widetilde{J})$ dada na demonstração do Lema do Índice, que

$$\begin{aligned} I_\ell(\widetilde{J},\widetilde{J}) = \langle \widetilde{J},\widetilde{J}'\rangle(\ell) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\widetilde{J}(t)\right|^2\Big|_{t=\ell} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\operatorname{senh}^2(t\sqrt{-b})}{\operatorname{senh}^2(\ell\sqrt{-b})}\Big|_{t=\ell} \\ &= \frac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-b})\cosh(t\sqrt{-b})}{\operatorname{senh}^2(\ell\sqrt{-b})}\sqrt{-b}\Big|_{t=\ell} \\ &= (\operatorname{cotgh}\,\ell\sqrt{-b})\sqrt{-b} > \sqrt{-b}. \end{aligned}$$

Além disto, se $b = 0$, $I_\ell(\widetilde{J},\widetilde{J}) > 0$. Portanto, pelo Lema do Índice, obteremos a seguinte estimativa para $I_\ell(V,V)$:

$$I_\ell(V,V) \geq I_\ell(\widetilde{V},\widetilde{V}) \geq I_\ell(\widetilde{J},\widetilde{J}) > \sqrt{-b}.$$

Como as geodésicas γ_s da variação f são mais curtas do que γ, teremos

$$\ell E(\gamma) = (L(\gamma))^2 \geq (L(\gamma_s))^2 = \ell E(\gamma_s),$$

donde,

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{1}{2}E''(0) &= I_\ell(V,V) + \langle S_{\gamma'(\ell)}V(\ell), V(\ell)\rangle \\ &> \sqrt{-b} + \langle S_{\gamma'(\ell)}V(\ell), V(\ell)\rangle. \end{aligned}$$

Como $V(\ell) = v$, teremos

$$\langle B(v,v), \gamma'(\ell)\rangle = \langle S_{\gamma'(\ell)}v, v\rangle < -\sqrt{-b}.$$

Portanto, para todo $v \in T_qM$, $|v| = 1$, temos que

$$||B(v,v)|| > \sqrt{-b}. \tag{6}$$

Por outro lado, pela fórmula de Gauss, se v e w são vetores ortonormais de T_qM, temos, pela hipótese do Teorema,

$$\langle B(v,v), B(w,w)\rangle - ||B(v,w)||^2 = K(v,w) - \overline{K}(v,w) \leq -b. \tag{7}$$

O fato de que as condições (6) e (7) são incompatíveis com a condição $\dim \overline{M} < 2 \dim M$ segue do seguinte lema algébrico, essencialmente devido a Otsuki. A demonstração do lema concluirá, portanto, a demonstração do teorema.

3.3 Lema (Otsuki). *Seja* $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *uma forma bilinear simétrica tal que, para algum* $b \leq 0$,

$$\langle B(v,v), B(w,w)\rangle - ||B(v,w)||^2 \leq -b,$$

$$||B(v,v)|| > \sqrt{-b},$$

para todo par ortonormal $v, w \in \mathbb{R}^n$. *Então* $k \geq n$.

Demonstração do Lema: Suponhamos $k < n$ e vamos obter uma contradição. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ a esfera unitária e considere a aplicação $f\colon S \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(v) = \langle B(v,v), B(v,v)\rangle.$$

Seja $v \in S$ um ponto onde f assume o mínimo. Então tomando a curva $v(t) = \cos tv + \operatorname{sen} tw$ em S, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, teremos

$$\begin{aligned} (8) \qquad 0 = df_v(w) &= 2\Big\langle \frac{d}{dt} B(v(t), v(t))\Big|_{t=0}, B(v,v)\Big\rangle \\ &= 2\langle 2B(v'(0), v), B(v,v)\rangle = 4\langle B(w,v), B(v,v)\rangle, \end{aligned}$$

e, como $v''(0) = -v$,

$$\begin{aligned} (9) \qquad 0 \leq d^2 f_v(w,w) &= 4\langle B(v'(0), v), 2B(v'(0), v)\rangle \\ &\quad + 4\langle B(v''(0), v), B(v,v)\rangle + 4\langle B(w, v'(0)), B(v,v)\rangle \\ &= 8||B(w,v)||^2 - 4\langle B(v,v), B(v,v)\rangle + 4\langle B(w,w), B(v,v)\rangle. \end{aligned}$$

Considere agora a aplicação $L\colon T_v S \to \mathbb{R}^k$, dada por

$$L(w) = B(v,w).$$

A equação (8) acima significa que $\langle L(w), B(v,v)\rangle = 0$, logo $\dim L(T_v S) \leq k - 1$. Como $k < n$, o núcleo de L tem pelo

menos dimensão 1, donde existe $w_0 \neq 0$, $w_0 \perp v$, com $L(w_0) = 0 = B(v, w_0)$.

Introduzindo o w_0 achado na equação (9), obteremos

$$0 \leq \langle B(w_0, w_0), B(v, v)\rangle - \langle B(v, v), B(v, v)\rangle.$$

Pelas hipóteses do Lema, concluímos que

$$0 \leq \langle B(w_0, w_0), B(v, v)\rangle - ||B(v, v)||^2 <$$
$$\langle B(w_0, w_0), B(v, v)\rangle - \left(\sqrt{-b}\right)^2 \leq -b - \left(\sqrt{-b}\right)^2 = 0,$$

o que dá a contradição procurada. □

3.4 Corolário (C. Tompkins, "Isometric embeddings of flat manifolds in euclidean space", Duke Math. J. 5 (1939), 58-61). *Suponha que M é compacta com curvatura nula. Se $k < n$, não existe imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$; em particular, o toro plano T^n (v.* Exemplo 2.7, Cap. I*) não pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

3.5 Corolário(B. O'Neill, "Immersions of manifolds of nonpositive curvature", Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 132-134). *Suponha $\overline{M}$ completa, simplesmente conexa e $K_{\overline{M}} \leq 0$. Seja M compacta,* $\dim \overline{M} < 2 \dim M$ *e $K_M \leq K_{\overline{M}}$. Então, não existe uma imersão isométrica $f\colon M \to \overline{M}$.*

3.6 Observação. A hipótese de ser M compacta é essencial no Teorema 3.1, como mostra o exemplo de superfícies (completas) de $K \leq 0$ em $\mathbb{R}^3$. Por outro lado, sabe-se que o plano hiperbólico H^2 (uma superfície completa com $K \equiv -1$) não pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^3$ (Teorema de Hilbert, v. M. do Carmo [dC 2], pg. 446). É um problema em aberto saber se o espaço hiperbólico H^n pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^{2n-1}$. Isto seria a generalização natural do Teorema de Hilbert acima mencionado.

3.7 Observação. Essencialmente a mesma demonstração que usamos no Teorema 3.1 pode servir para demonstrar o seguinte resultado de S.S. Chern e N. Kuiper, "Some theorems on the

isometric embedding of compact Riemannian manifolds in euclidean spaces", Ann. of Math. 56 (1952), 422-430: *Suponha que M^n é compacta e que, para cada ponto $p \in M$ existe um subespaço de dimensão m, $V^m \subset T_pM$, tal que as curvaturas seccionais segundo planos contidos em V sejam não positivas. Se $k < m$, não existe imersão isométrica $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$.* A importância histórica do artigo de Chern-Kuiper é que eles destacaram o fato fundamental que a existência de uma imersão isométrica $f\colon M^n \to \overline{M}^{n+k}$ implica em relações entre a nulidade da segunda forma quadrática de f e a nulidade de um operador definido intrinsecamente em M a partir da curvatura de M. Para maiores detalhes ver L. Rodríguez, [Ro].

3.8 Observação. O toro T^{n+1} com a métrica plana (Cf. Exemplo 2.7, Cap. I) contém o toro T^n como subvariedade totalmente geodésica. Isto mostra que a hipótese de ser $\overline{M}$ simplesmente conexa no Teorema 3.1 é necessária.

4 Pontos focais e uma extensão do Teorema de Rauch

A noção de ponto conjugado a um dado ponto $p \in M$ estende-se à noção de ponto focal a uma subvariedade $N \subset M$ de uma variedade Riemanniana M. A idéia é considerar variações

$$f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \to M$$

de uma geodésica $\gamma\colon [0, \ell] \to M$ com $\gamma(0) = p \in N$ e $\gamma'(0) \in (T_pN)^\perp$, satisfazendo as seguintes condições:

1) A curva $t \to f_s(t)$, $t \in [0, \ell]$ é uma geodésica.

2) Para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f_s(0) = \alpha(s) \in N$ e

$$A(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, 0) \in (T_{\alpha(s)}N)^\perp.$$

É claro que $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ.

4.1 Lema. *O campo de Jacobi J construído acima satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $J(0) \in T_pN$,

ii) $J'(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)$,

onde $S_{\gamma'(0)}$ é o operador auto-adjunto de T_pN dado pela segunda forma quadrática de $N \subset M$.

Reciprocamente, se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$, satisfazendo (i) *e* (ii), *então existe uma variação f de γ satisfazendo* (1) *e* (2), *cujo campo variacional é J.*

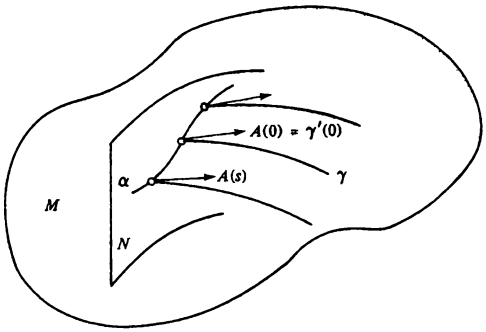


Figura 4

Demonstração: É claro que

$$J(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{d}{ds}(\alpha(s))\bigg|_{s=0} \in T_pN,$$

o que verifica (i). Para provar (ii), seja $v \in T_pN$ um vetor unitário. Mostraremos que

$$\langle J'(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)), v\rangle = 0. \tag{10}$$

Ora,

$$\left\langle \frac{DJ}{dt}(0), v \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0), v \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(0,0), v \right\rangle = \left\langle \frac{DA}{ds}(0), v \right\rangle.$$

Como $A(s)$ é um campo ao longo de $\alpha(s)$ com $\alpha'(0) = J(0)$, teremos

$$\frac{DA}{ds}(0) = \overline{\nabla}_{J(0)} A(s)\Big|_{s=0}$$

onde $\overline{\nabla}$ é a derivada covariante de M. Portanto,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{DA}{ds}(0), v \right\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_{J(0)} A(s))^T, v\rangle\big|_{s=0} \\ &= \langle -S_{A(0)}(J(0)), v\rangle = \langle -S_{\gamma'(0)}(J(0)), v\rangle,\end{aligned}$$

o que implica (1) e verifica (ii).

Para provar a recíproca, seja $s \to \alpha(s)$ uma curva em N com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = J(0)$. Podemos escolher um campo W ao longo de α tal que $W(0) = \gamma'(0)$ e $\frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$. Escreva $W(s) = V(s) + U(s)$, onde

$$V(s) \in (T_{\alpha(s)}(N))^{\perp}, \quad U(s) \in T_{\alpha(s)}(N),$$

e defina $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tV(s))$. Mostraremos que f é uma variação de γ que satisfaz (1) e (2) e cujo campo variacional é J.

Com efeito, para todo s, a curva

$$t \mapsto f_s(t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s)$$

é uma geodésica. Além disto,

$$f_s(0) = \alpha(s) \in N,$$

e

$$A(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s,0) = (d\exp_{\alpha(s)})_0(V(s)) = V(s) \in (T_{\alpha(s)}(N))^{\perp}.$$

Resta mostrar que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = J(t)$. É suficiente verificar que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = J(0)$ e $\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{DJ}{dt}(0)$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \alpha'(0) = J(0)$$

e

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \frac{DV}{ds}(0) = \frac{DW}{ds}(0) - \frac{DU}{ds}(0)$$
$$= \frac{DJ}{dt}(0) - \frac{DU}{ds}(0),$$

basta mostrar que $\frac{DU}{ds}(0) = 0$. Mas $J(t)$ e $\frac{\partial s}{\partial s}(0,t)$ satisfazem:

$$\frac{DJ}{dt}(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^\perp$$
$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) + S_{\gamma'(0)}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(0,0)\right) \in (T_pN)^\perp,$$

onde a segunda afirmação provém da primeira parte do Lema. Como $J(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,0)$, podemos concluir que

$$\frac{DU}{\partial s}(0) = \frac{DJ}{dt}(0) - \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(0,0)\right) \in (T_pN)^\perp.$$

Por outro lado, $U(0) = 0$ e $U(s) \in T_{\alpha(s)}(N)$. Portanto, dado $v \in (T_pN)^\perp$ e um campo $v(s)$ ao longo de $\alpha(s)$ com $v(0) = v$ e $v(s) \in (T_{\alpha(s)}(N))^\perp$, teremos

$$0 = \frac{d}{ds}\langle U(s), v(s)\rangle\Big|_{s=0} = \left\langle \frac{DU}{ds}(0), v\right\rangle + \left\langle U(0), \frac{Dv}{ds}(0)\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{DU}{ds}(0), v\right\rangle.$$

Pela arbitrariedade de v, isto implica que $\frac{DU}{ds}(0) = 0$, o que prova o afirmado, e conclui a demonstração. □

4.2 Definição. Seja $N \subset M$ uma subvariedade de uma variedade Riemanniana M, $q \in M$ é um *ponto focal* de N se existe uma geodésica $\gamma\colon [0,\ell] \to M$, com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^\perp$, $\gamma(\ell) = q$, e um campo de Jacobi J não nulo ao longo de γ, satisfazendo (i), (ii) e com $J(\ell) = 0$.

4.3 Exemplo. Se $S^{n-1} \subset S^n$ é o equador de S^n, isto é, $S^{n-1} = \{x \in S^n; x = (x_1, \ldots, x_n, 0)\}$, então o pólo norte $(0,0,\ldots,0,1)$ e o pólo sul $(0,\ldots,0,-1)$ são pontos focais de S^{n-1} em S^n.

Para obter uma caracterização dos pontos focais em termos da aplicação exponencial, introduziremos a seguinte notação. Sejam $T(M) \to M$ o fibrado tangente de M, $T(N) \to N$ o fibrado tangente de N e $T(N)^\perp \to N$ o fibrado normal da imersão $N \subset M$ (i.e., um ponto de $T(N)^\perp$ é um par (p, n), onde $p \in N$, $n \in (T_pN)^\perp$). Lembremos que a aplicação exponencial pode ser pensada como uma aplicação $\exp\colon T(M) \to M$, definida por

$$\exp(p, v) = \exp_p(v).$$

Como $T(N)^\perp \to N$ está contido na restrição de $T(M) \to M$ a $N \subset M$, a aplicação exponencial pode ser restrita a $T(N)^\perp$; esta restrição será indicada por

$$\exp^\perp\colon T(N)^\perp \to M.$$

Observemos que $\dim T(N)^\perp = \dim M$.

4.4 Proposição. *$q \in M$ é um ponto focal de $N \subset M$ se e somente se é um valor crítico de $exp^\perp$.*

Demonstração: Suponhamos que q é um ponto focal de N. Pelo Lema 4.1, existe uma geodésica $\gamma\colon [0, \ell] \to M$, com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma(\ell) = q$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^\perp$ e uma variação $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \ell] \to M$ de γ satisfazendo (1) e (2) e com $\frac{\partial f}{\partial s}(0, \ell) = 0$. Segue-se que

$$w(s) = (\alpha(s), \ell A(s)), \quad A(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, 0), \quad \alpha(s) = f_s(0),$$

é uma curva em $T(N)^\perp$ tal que:

$$\exp^\perp(w(s)) = \exp_{\alpha(s)} \ell A(s) = f(s, \ell),$$
$$\exp^\perp(w(0)) = q$$

e

$$(d \exp^\perp)_{w(0)}(w'(0)) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, \ell) = 0.$$

Então $w(0)$ é ponto crítico de $\exp^\perp$, com $\exp^\perp(w(0)) = q$.

Reciprocamente, suponhamos que q é valor crítico de $\exp^{\perp}$. Então existem w_0, w_0' tais que $\exp^{\perp}(w_0) = q$ e $(d\exp^{\perp})_{x_0}(w_0') = 0$. Seja $w(s) = (\sigma(s), \ell V(s))$ uma curva em $T(N)^{\perp}$, com $w(0) = w_0$ e $w'(0) = w_0'$. Como $q = \exp_{\sigma(0)}(\ell V(0))$, existe uma geodésica $\gamma\colon [0,\ell] \to M$ tal que $\gamma(0) = \sigma(0)$, $\gamma(\ell) = q$, $\gamma'(0) = V(0)$. Consideremos a variação de γ dada por

$$f(s,t) = \exp_{\sigma(s)} tV(s).$$

f satisfaz as condições (1) e (2). Com efeito,

$$f(s,0) = exp_{\sigma(s)}(0) = \sigma(s) \in N,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s,0) = (d\exp_{\sigma(s)})_0(V(s)) = V(s) \in (T_{\sigma(s)}(N))^{\perp}.$$

Pelo lema, $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ é um campo de Jacobi satisfazendo (i) e (ii), com

$$\begin{aligned} J(\ell) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,\ell) &= \frac{\partial}{\partial s}\exp_{\sigma(s)} \ell V(s)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\exp^{\perp} w(s)\Big|_{s=0} = (d\exp^{\perp})_{w_0}(w_0') = 0, \end{aligned}$$

e portanto, q é um ponto focal de N. □

4.5 Definição. Seja $N \subset M$ uma subvariedade de uma variedade Riemanniana M. O conjunto dos pontos focais de N será chamado o *conjunto focal* $F(N) \subset M$ de N.

4.6 Exemplo. Seja $N^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$. As componentes conexas do conjunto focal $F(N) \subset \mathbb{R}^3$ são as chamadas "superfícies focais" (ou superfícies dos centros) da geometria diferencial clássica. Em geral tais conjuntos não são superfícies regulares e podem degenerar em pontos ou curvas. Por exemplo, se N^2 é a esfera S^2, então $F(S^2)$ é o centro de S^2; se N^2 é o cilindro circular reto C, $F(C)$ é o eixo de C. Uma maneira de construir geometricamente os pontos focais de $N^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a seguinte.

Seja $\boldsymbol{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to N \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização de N em $p \in N$. Se indicarmos por (u_1, u_2) as coordenadas de U e por $n = n(u_1, u_2)$ um campo normal unitário em $\boldsymbol{x}(U) \subset N$, podemos escrever a aplicação $\exp^{\perp}\colon T(U)^{\perp} \to \mathbb{R}^3$ como

$$\exp^{\perp}((u_1, u_2), t) = \boldsymbol{x}(u_1, u_2) + tn, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A base do espaço tangente $T_{(p,tn)}(T(N)^{\perp}) \approx \mathbb{R}^3$ associada a esta parametrização é

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}, n.$$

Nesta base, a aplicação linear $d\exp^{\perp}$ é dada pela matriz

$$d\exp^{\perp} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} + t\frac{\partial n}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} + t\frac{\partial n}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \right\rangle & \left\langle n, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} + t\frac{\partial n}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} + t\frac{\partial n}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \right\rangle & \left\langle n, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1} + t\frac{\partial n}{\partial u_1}, n \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} + t\frac{\partial n}{\partial u_2}, n \right\rangle & \langle n, n \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} g_{ij} - t\left\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_i \partial u_j}, n \right\rangle & 0 \\ \hline B & 1 \end{array}\right)$$

onde a matriz linha B não importa no que se segue. Pela Proposição 4.4, $\boldsymbol{x} + tn$ é um ponto focal de N se e só se a matriz acima é singular. como os coeficientes da segunda forma quadrática H_n na base $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}$ são dados por

$$h_{ij} = H_n\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j}\right) = \left\langle B\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j}\right), n \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial u_i \partial u_j}, n \right\rangle,$$

concluímos que a matriz acima é singular se e só se a matriz

$$(g_{ij} - th_{ij})$$

é singular. É possível escolher a parametrização $\boldsymbol{x}$ de modo que em p, (g_{ij}) seja a matriz identidade. Portanto, $\boldsymbol{x}+tn$ é um ponto focal se e só se $\frac{1}{t}$ é um valor próprio de (h_{ij}), isto é, $\frac{1}{t}$ é alguma curvatura principal de N^2 em p.

Em resumo, para construir uma componente conexa de $F(N)$, fixamos uma curvatura principal k_i e marcamos sobre a normal a cada $p \in N$, na direção dada por $n(p)$, um comprimento igual a $1/k_i(p)$ (este ponto é o centro do círculo osculador da seção normal de N na direção principal e_i, o que justifica o nome de "superfícies dos centros").

Passaremos agora a uma extensão do Teorema de Rauch em que a noção de ponto conjugado é substituida pela de ponto focal. Precisamos de uma definição.

4.7 Definição. Seja $\gamma\colon [0,a] \to M$ uma geodésica de M. Seja $B_\varepsilon(0) \subset \gamma'(0)^\perp$ uma bola contida no complemento ortogonal de $\gamma'(0)$, de raio ε e centro na origem 0. Diremos que γ é *livre de pontos focais* em $(0,a]$ se existe algum $\varepsilon > 0$ tal que γ não possui pontos focais relativamente à subvariedade $\sum_\varepsilon = \exp_{\gamma(0)}(B_\varepsilon(0))$ (Fig. 5).

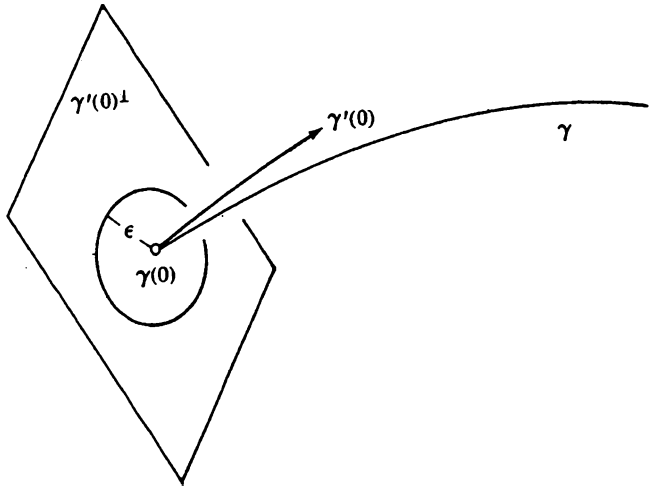


Figura 5

Observe que como $\sum_t$ é geodésica em p, um campo de Jacobi J ao longo de γ, com $J(0) \neq 0$ e $J'(0) = 0$, satisfaz automaticamente à condição:

$$S_{\gamma'(0)}(J(0)) = 0.$$

O Lema do Índice para pontos focais é o seguinte.

4.8 Lema. *Seja $\gamma\colon [0,a] \to M^n$ uma geodésica livre de pontos focais em $(0,a]$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $\langle J, \gamma' \rangle = 0$, e seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ com $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. Suponhamos que $J'(0) = 0$ e $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (0,a]$. Então*

$$I_{t_0}(J,J) \leq I_{t_0}(V,V)$$

e a igualdade ocorre se e só se $V = J$ em $[0,t_0]$.

Demonstração: Seja $\{J_1, \ldots, J_{n-1}\}$ uma base do espaço vetorial dos campos de Jacobi J tais que $J'(0) = 0$, $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. O fato de que γ é livre de pontos focais em $(0,a]$ implica que, para cada $t \in (0,a]$, $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ é uma base para $(\gamma'(t))^{\perp}$.

A partir daí, a prova segue de maneira inteiramente análoga à do Lema do Índice. □

4.9 Teorema. *Sejam $\gamma\colon [0,a] \to M^n$ e $\tilde{\gamma}\colon [0,a] \to \widetilde{M}^{n+k}$ geodésicas, com a mesma velocidade e sejam J e $\widetilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, tais que*

$$0 = J'(0) = \widetilde{J}'(0), \langle J(0), \gamma'(0) \rangle = \langle J(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle = 0,$$
$$|J(0)| = |\widetilde{J}(0)|.$$

Admita que $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais em $(0,a]$ e que, para todo t e todo $x \in T_{\gamma(t)}(M)$, $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}(\widetilde{M})$, tem-se

$$\widetilde{K}(\tilde{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(x, \gamma'(t)).$$

Então $|\widetilde{J}| \leq |J|$. Além disto, se para algum $t_0 \in (0,a]$, tem-se $|\widetilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, então $\widetilde{K}(\widetilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = K(J(t), \gamma'(t))$ para todo $t \in [0,t_0]$.

Demonstração: A demonstração é análoga à do Teorema 2.3 com as seguintes modificações: $\frac{|J|^2}{|\tilde{J}|^2}$ está bem definida, pois $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais e $I_{t_0}(\phi(U), \phi(U)) \geq I_{t_0}(\widetilde{U}, \widetilde{U})$ pelo Lema 4.8. □

Outras extensões úteis do teorema de comparação de Rauch podem ser encontradas em F. Warner, *Extensions of the Rauch comparison theorem to submanifolds*, Trans. A.M.S. 122 (1966), 341-356 e em H. Heintze e H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 11 (1978), 451-470.

O teorema de Rauch admite uma generalização global extremamente importante, que é o chamado Teorema de Toponogov. Uma de suas versões se enuncia da seguinte maneira.

Teorema (Toponogov). *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \geq H$. Sejam γ_1 e γ_2 segmentos de geodésicas normalizadas em M com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Indiquemos por $M^2(H)$ uma variedade de dimensão dois com curvatura constante H. Admitamos que a geodésica γ_1 é minimizante e que, se $H > 0$, $\ell(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Consideremos em $M^2(H)$ duas geodésicas normalizadas $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, tais que $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$, $\ell(\gamma_i) = \ell(\tilde{\gamma}_i) = \ell_i$, $i = 1, 2$, e $\operatorname{ang}(\tilde{\gamma}_1'(0), \tilde{\gamma}_2'(0)) = \operatorname{ang}(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$. Então*

$$d(\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_2)) \leq d(\bar{\gamma}_1(\ell_1), \bar{\gamma}_2(\ell_2)).$$

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Cheeger e Ebin [CE].

O Teorema de Toponogov é um instrumento essencial para o estudo das relações entre topologia e curvatura mencionadas na Introdução do Capítulo IX. Um dos pontos culminantes deste estudo, o Teorema da esfera, será apresentado no Capítulo XIII deste livro. A demonstração aí apresentada não utiliza o Teorema de Toponogov. Uma demonstração utilizando o Teorema de Toponogov, além de várias aplicações deste teorema ao estudo

das relações entre topologia e curvatura, pode ser encontrada em Mercuri e Rigas [MR].

Exercícios

1. (*Lema de Klingenberg*). Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \leq K_0$, onde K_0 é uma constante positiva. Sejam $p, q \in M$ e seja γ_0 e γ_1 duas geodésicas distintas unindo p a q com $\ell(\gamma_0) \leq \ell(\gamma_1)$. Admita que γ_0 é homotópica a γ_1, isto é, existe uma família contínua de curvas α_t, $t \in [0,1]$ tal que $\alpha_0 = \gamma_0$ e $\alpha_1 = \gamma_1$. Prove que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

(Assim, a homotopia dada tem que passar por uma curva "longa". Fig. 6).

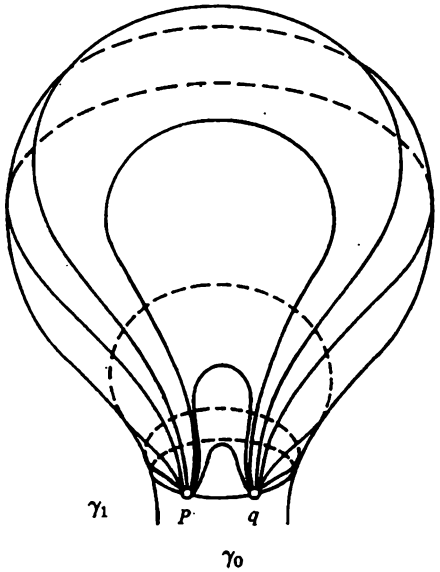


Figura 6

Sugestão: Admita $\ell(\gamma_0) < \frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ (de outro modo, não há o que provar). Pelo Teorema de Rauch, $\exp_p : T_pM \to M$ não possui pontos críticos em uma bola aberta B de raio $\pi/\sqrt{K_0}$ centrada em 0. Para t pequeno, é possível levantar a curva α_t ao espaço tangente T_pM, i.e., existe uma curva $\tilde{\alpha}_t$ em T_pM, ligando $\exp_p^{-1}(p) = 0$ a $\exp_p^{-1}(q) = \tilde{q}$, tal que $\exp_p \circ \tilde{\alpha}_t = \alpha_t$. E claro que não é possível fazer o mesmo para todo $t \in [0,1]$, pois α_1 não pode ser levantado mantendo as extremidades fixas. Conclui-se que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t(\varepsilon)$ tal que $\alpha_{(\varepsilon)}$ pode ser levantado em $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$ e $\tilde{\alpha}_{t(\varepsilon)}$ contém pontos a distância $< \varepsilon$ do bordo ∂B de B. Caso contrário, para algum $\varepsilon > 0$, todo levantamento $\tilde{\alpha}_t$ está a uma distância $\geq \varepsilon$ de ∂B; o conjunto dos t's para os quais é possível levantar α_t seria então aberto e fechado e α_1 poderia ser levantado, o que é uma contradição. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t(\varepsilon)}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} - 2\varepsilon.$$

Escolha agora uma seqüência $\{\varepsilon_n\} \to 0$, e considere uma subseqüência convergente de $\{t(\varepsilon_n)\} \to t_0$. Então existe uma curva α_{t_0} com

$$\ell(\gamma_0) + \ell(\alpha_{t_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

2. Use o lema de Klingenberg do exercício anterior para provar o Teorema de Hadamard (v. Teorema 3.1 do Cap. VII).
   Sugestão: Faça $K_0 = 1/n$, n inteiro, no lema de Klingenberg e mostre que se M é simplesmente conexa, existe uma única geodésica ligando dois pontos $p, q \in M$. Pois se existissem duas tais geodésicas, elas seriam homotópicas e, pelo lema de Klingenberg, existiria uma seqüência de curvas de comprimentos $\geq \pi\sqrt{n}$ nesta homotopia.

3. Seja M uma variedade Riemanniana completa com curva-

tura seccional não positiva. Prove que

$$|(d\exp_p)_v(w)| \geq |w|,$$

para todo $p \in M$, todo $v \in T_pM$ e todo $w \in T_v(T_pM)$.

4. (*Conjuntos focais de curvas do plano*).

   a) Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Mostre que o conjunto focal $F(C) \subset \mathbb{R}^2$ de C é obtido tomando na normal positiva n de $p \in C$ um comprimento igual a $1/k$, onde k é a curvatura de C em p.

   Sugestão: Use o mesmo argumento do Exemplo 4.6.

   b) Mostre que o conjunto focal da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é dado por

   $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}\right\}$$

   (Fig. 7).

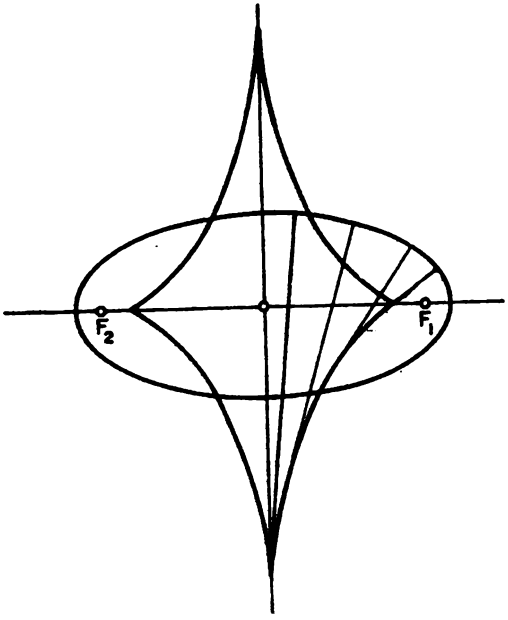


Figura 7

c) Mostre que o conjunto focal da curva

$$t \to (\cos t + t \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t + t \cos t)$$

é o círculo $t \to (\cos t, -\operatorname{sen} t)$ (Fig. 8).

5. (*O teorema de comparação de Sturm*). Neste exercício apresentaremos uma demonstração direta do Teorema de Rauch em dimensão dois, sem utilizar o material do presente capítulo. O que faremos será indicar uma demonstração do Teorema de Sturm mencionado na Introdução do capítulo.
Sejam

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0, \quad f(0) = 0, \quad t \in [0, \ell],$$
$$\tilde{f}''(t) + \tilde{K}(t)\tilde{f}(t) = 0, \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad t \in [0, \ell],$$

duas equações diferenciais ordinárias. Suponhamos que $\tilde{K}(t) \geq K(t)$ para $t \in [0, \ell]$, e que $f'(0) = \tilde{f}'(0) = 1$.

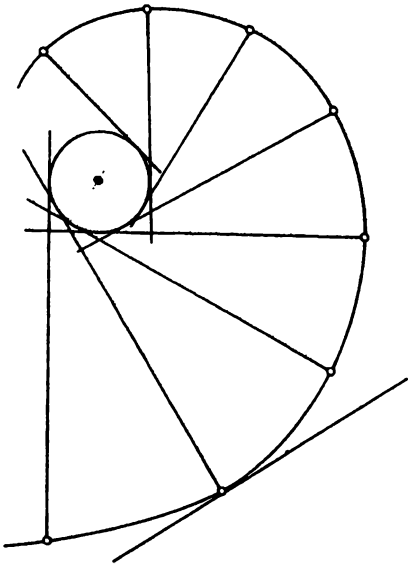


Figura 8

a) Mostre que para todo $t \in [0, \ell]$,

$$(1) \qquad 0 = \int_0^t \{\tilde{f}(f'' + Kf) - f(\tilde{f}'' + \widetilde{K}\tilde{f})\}dt$$
$$= [\tilde{f}f' - f\tilde{f}']_0^t + \int_0^t (K - \widetilde{K})f\tilde{f}\,dt.$$

Conclua daí que o primeiro zero de f não ocorre antes do primeiro zero de $\tilde{f}$ (isto é, se $\tilde{f}(t) > 0$ em $(0, t_0)$ e $\tilde{f}(t_0) = 0$, então $f(t) > 0$ em $(0, t_0)$).

Sugestão: Pela condição inicial, $f(t)$ é positivo em uma vizinhança de zero. Admita que $f(t_1) = 0$, $t_1 < t_0$. Então $f'(t_1) < 0$, $\tilde{f}(t_1) > 0$, e isto contradiz (1).

b) Suponha que $\tilde{f}(t) > 0$ em $(0, \ell]$. Use (1) e o fato que $f(t) > 0$ em $(0, \ell]$ para mostrar que $f(t) \geq \tilde{f}(t)$, $t \in [0, \ell]$, e que a igualdade se verifica para $t = t_1 \in (0, \ell]$ se e só se $K(t) = \widetilde{K}(t)$, $t \in [0, t_1]$.
Verifique que isto é o Teorema de Rauch em dimensão dois.

Sugestão: De (1) conclui-se que $f'/f \geq \tilde{f}'/\tilde{f}$, isto é, $(\log f)' \geq (\log \tilde{f})'$. Seja $0 < t_0 \leq t \leq \ell$. Integrando a última desigualdade entre t_0 e t, obteremos

$$\log f(t) - \log f(t_0) \geq \log \tilde{f}(t) - \log \tilde{f}(t_0),$$

isto é,

$$f(t)/\tilde{f}(t) \geq f(t_0)/\tilde{f}(t_0), \quad \text{para todo} \quad t_0 \in (0, \ell].$$

Observe agora que

$$\lim_{t_0 \to 0}(f(t_0)/\tilde{f}(t_0)) = \lim_{t_0 \to 0}(f'(t_0)/\tilde{f}'(t_0)) = 1,$$

donde a desigualdade pedida. Para a igualdade, volte a (1).

6. (*O teorema de oscilação de Sturm*). O que se segue é uma pequena generalização do teorema de comparação de Sturm. Apresentaremos o resultado em forma geométrica. Seja M^2 uma variedade Riemanniana completa de dimensão 2, e seja $\gamma\colon [0,\infty) \to M^2$ uma geodésica. Seja $J(t)$ um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = J(t_0) = 0$, $t_0 \in (0,\infty)$, e $J(t) \neq 0$, $t \in (0,t_0)$. Então J é um campo normal a γ e pode ser escrito $J(t) = f(t)e_2(t)$, onde $e_2(t)$ é o transporte paralelo de um vetor unitário $e_2 \in T_{\gamma(0)}(M)$ com $e_2 \perp \gamma'(0)$. Como J é um campo de Jacobi,

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0,$$

onde K é a curvatura Gaussiana de M^2. Admita que

$$K(t) \leq L(t),$$

onde L é uma função diferenciável em $[0,\infty)$. Prove que toda solução da equação

$$\tilde{f}''(t) + L(t)\tilde{f}(t) = 0$$

possui um zero em $[0,t_0]$, isto é, existe $t_1 \in [0,t_0]$ com $\tilde{f}(t_1) = 0$.

Sugestão: Suponha que $\tilde{f}(t) \neq 0$ para todo $t \in [0,t_0]$. Usando a expressão (1) do exercício anterior, obteremos

$$(2) \qquad \int_0^{t_0} (K-L)f\tilde{f}\,dt + \tilde{f}(t_0)f'(t_0) - \tilde{f}(0)f'(0) = 0.$$

Suponha, por exemplo, que $\tilde{f}(t) > 0$ e $f(t) < 0$ em $(0,t_0)$. Então $f'(0) < 0$ e $f'(t_0) > 0$. Isto contradiz (2). Os outros casos são tratados do mesmo modo.

7. (*Critério de Kneser para pontos conjugados em superfícies*). Seja M^2 uma variedade Riemanniana completa de dimensão dois e seja $\gamma\colon [0,\infty) \to M^2$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$.

Seja $K(s)$ a curvatura Gaussiana de M^2 ao longo de γ. Admita que:

$$(3) \qquad \int_t^\infty K(s)ds \leq \frac{1}{4(t+1)}, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0,$$

no sentido que a integral converge e tem a limitação indicada.

a) Defina

$$\omega(t) = \int_t^\infty K(s)ds + \frac{1}{4(t+1)},$$

e mostre que $\omega'(t) + (\omega(t))^2 \leq -K(t)$.

b) Para $t \geq 0$, faça $\omega'(t)+(\omega(t))^2 = -L(t)$ (donde $L(t) \geq K(t)$) e defina

$$\tilde{f}(t) = \exp\left(\int_0^t \omega(s)ds\right), \quad t \geq 0.$$

Mostre que

$$\tilde{f}''(t) + L(t)\tilde{f}(t) = 0, \quad \tilde{f}(0) = 1.$$

c) Observe que $\tilde{f}(t) > 0$ e use o teorema de oscilação de Sturm (Exercício 6) para mostrar que não existe um campo de Jacobi $J(s)$ em $\gamma(s)$ com $J(0) = 0$ e $J(s_0) = 0$, para algum $s_0 \in (0, \infty)$. Portanto, *a condição (3) implica que não existem pontos conjugados a p ao longo de* γ.

Capítulo XI

O Teorema do Índice de Morse

1 Introdução

Neste capítulo pretendemos demonstrar o Teorema do Índice de Morse. Tal resultado relaciona o número de pontos conjugados em um segmento de geodésica, contados com suas multiplicidades, ao índice de uma certa forma quadrática definida a partir da fórmula da segunda variação (essencialmente, a expressão $I_a(V,V)$).

O Teorema do Índice de Morse é uma generalização de um resultado clássico de Jacobi (v. Cor. 2.9) que afirma que um segmento de geodésica minimiza o comprimento de arco relativamente às curvas "vizinhas"de mesmas extremidades se e só se um tal segmento não possui pontos conjugados. A demonstração do Teorema do Índice que aqui apresentamos utiliza o Lema do Índice do Capítulo X.

2 O Teorema do Índice

Seja $\gamma\colon [0,a] \to M^n$ uma geodésica. Indiquemos por $\mathcal{V}(0,a)=$ $\mathcal{V}$ o espaço vetorial formado por campos vetoriais V ao longo de

γ, diferenciáveis por partes e se anulando nas extremidades de γ, isto é, $V(0) = V(a) = 0$.

2.1 Definição. A *forma do índice* de γ é a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica I_a definida em $\mathcal{V}$ por

$$(1) \qquad I_a(V,W) = \int_0^a \{\langle V', W'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W\rangle\} dt,$$

onde $V, W \in \mathcal{V}$. (Cf. Obs. 2.10 do Cap. IX).

Observe que a simetria de I_a decorre da parte (d) da Proposição 2.5 do Capítulo IV.

De uma maneira geral, chamamos *índice* de uma forma bilinear simétrica B em um espaço vetorial $\mathcal{V}$ à dimensão máxima de um subespaço de $\mathcal{V}$ no qual a forma quadrática associada a B é negativa definida. A *nulidade* de B é a dimensão do subespaço de $\mathcal{V}$ formado pelos elementos $V \in \mathcal{V}$ tais que $B(V, W) = 0$, para todo $W \in \mathcal{V}$; tal subespaço é o *espaço nulo* de B. Diz-se que B é *degenerada* se a sua nulidade for estritamente positiva.

Podemos agora enunciar o teorema principal deste capítulo.

2.2 Teorema do Índice (Morse). *O índice da forma I_a é finito e igual ao número de pontos $\gamma(t)$, $0 < t < a$, conjugados a $\gamma(0)$, cada um contado com a sua multiplicidade.*

Antes de iniciar a demonstração do teorema, precisamos de algumas proposições preliminares.

2.3 Proposição. *Um elemento $V \in \mathcal{V}$ pertence ao espaço nulo de I_a se e somente se V é um campo de Jacobi ao longo de γ.*

Demonstração: Primeiro observamos que, como apenas para um número finito de pontos t_j, $j = 1, \ldots, k-1$, $\frac{DV}{dt}(t_j^-) \neq \frac{DV}{dt}(t_j^+)$, temos a seguinte expressão para I_a. (Compare Obs. 2.10 do Cap. IX)

$$(2) \qquad I_a(V,W) = -\int_0^a \langle V'' + R(\gamma', V)\gamma', W\rangle \, dt - \sum_{j=1}^{k-1} \left\langle \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-), W(t_j) \right\rangle.$$

Se V é um campo de Jacobi, então por (2), V está no espaço nulo de I_a.

Reciprocamente, suponha que $I_a(V,W) = 0$ para todo $W \in \mathcal{V}$. Seja $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = a$ uma subdivisão de $[0,a]$ tal que a restrição $V|[t_{j-1}.t_j]$ é diferenciável, $j = 1,\ldots,k$. Seja $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $f(t) > 0$, para $t \neq t_j$ e $f(t_j) = 0$, $j = 0,\ldots,k$. Defina W por

$$W(t) = f(t)(V'' + R(\gamma', V)\gamma').$$

Então

$$0 = I_a(V,W) = \int_0^a f(t)||V'' + R(\gamma', V)\gamma'||^2\, dt.$$

Segue-se daí que o integrando se anula, e portanto a restrição $V|(t_{j-1}, t_j)$ é um campo de Jacobi. Para ver o que ocorre em cada t_j, escolha $T \in \mathcal{V}$ de modo que

$$T(t_j) = \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-), \quad j = 1,\ldots,k-1.$$

Como

$$0 = I_a(V,T) = -\sum_{j=1}^{k-1} \left\| \frac{DV}{dt}(t_j^+) - \frac{DV}{dt}(t_j^-) \right\|^2,$$

concluimos que V é de classe C^1 em cada t_j. Por unicidade das soluções de uma equação diferencial ordinária, V é (pelo menos) C^2. Portanto V é um campo de Jacobi. □

2.4 Corolário. *I_a é degenerada se e somente se os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(a)$ são conjugados ao longo de γ. Neste caso, a nulidade de I_a é igual à multiplicidade de $\gamma(a)$ como ponto conjugado.*

Para a próxima proposição, bem como para a demonstração do Teorema do Índice, precisamos de algumas considerações preliminares.

Como cada ponto de M está contido em uma vizinhança totalmente normal e $\gamma([0,a])$ é compacto, podemos escolher uma subdivisão

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = a$$

de $[0,a]$ tal que cada $\gamma|[t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,k$, esteja contido em uma vizinhança totalmente normal. Assim cada $\gamma|[t_{j-1},t_j]$ é uma geodésica minimizante e não contém pontos conjugados. No que se segue, uma tal subdivisão será chamada *normal* e será fixada até menção em contrário.

Seja $\mathcal{V}^-(0,a) = \mathcal{V}^-$ o subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ formado pelos campos V tais que $V|[t_{j-1},t_i]$, $i = 1,\ldots,k$, é um campo de Jacobi; $\mathcal{V}^-$ tem dimensão finita. Seja $\mathcal{V}^+$ o subespaço de $\mathcal{V}$ constituido pelos campos W tais que $W(t_1) = W(t_2) = \cdots = W(t_{k-1}) = 0$.

2.5 Proposição. *$\mathcal{V}$ é a soma direta $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, e os subespaços $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ são ortogonais em relação a I_a. Além disto, I_a restrita a $\mathcal{V}^+$ é positiva definida.*

Demonstração: Dado $V \in \mathcal{V}$, seja W um campo em $\mathcal{V}^-$ dado por $W(t_j) = V(t_j)$; como $\gamma|[t_{j-1},t_j]$ não posui pontos conjugados, um tal W existe e é único. Assim $V - W \in \mathcal{V}^+$ e, portanto $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$. Além disto, se $X \in \mathcal{V}^-$ e $Y \in \mathcal{V}^+$, temos

$$I_a(X,Y) = -\sum_{j=1}^{k-1} \left\langle 0, \frac{DX}{dt}(t_j^+) - \frac{DX}{dt}(t_j^-) \right\rangle = 0,$$

isto é, $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ são ortogonais relativamente a I_a. Isto demonstra a primeira parte da Proposição 2.5.

Como $\gamma|[t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,k$, são geodésicas minimizantes, elas têm energia menor do que qualquer outro caminho entre os seus extremos. Logo, se $V \in \mathcal{V}^+$, então $I_a(V,V) \geq 0$.

Resta mostrar que $I_a(V,V) > 0$ se $V \in \mathcal{V}^+ - \{0\}$. Suponhamos, por absurdo, que $I_a(V,V) = 0$ com $V \in \mathcal{V}^+$, $V \neq 0$. Vamos primeiro mostrar que isto implica que V pertence ao espaço nulo de I_a. Com efeito, se $W \in \mathcal{V}^-$, então $I_a(V,W) = 0$,

pela ortogonalidade acima. Se $W \in \mathcal{V}^+$, considere a desigualdade

$$0 \leq I_a(V + cW, V + cW) = 2cI_a(V, W) + c^2 I_a(W, W),$$

válida para todo real c. Isto quer dizer que existem reais $A \geq 0$ e B tais que $Ac^2 + 2Bc \geq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$, o que só é possível quando $B = 0$, isto é, $I_a(V, W) = 0$. Portanto V pertence ao espaço nulo de I_a. Como o espaço nulo é constituido de campos de Jacobi e V se anula em t_j, concluimos que $V = 0$, o que é uma contradição, e conclui a demonstração. □

2.6 Corolário. *O índice de I_a é igual ao índice de I_a restrito a $\mathcal{V}^-$; em particular, o índice de I_a é finito. O mesmo se passa com a nulidade de I_a.*

Demonstração do Teorema do Índice: Convém introduzir a seguinte notação. Se $t \in [0, a]$, indicaremos por γ_t a restrição de γ ao intervalo $[0, t]$; a forma do índice correspondente será indicada por I_t, e o índice de I_t será indicado por $i(t)$. Desta maneira, definimos uma função $i\colon [0, a] \to \mathbb{N}$, cujo comportamento queremos estudar.

Lembrando que a subdivisão de $[0, a]$ por pontos t_j, $j = 0, \ldots, k$, (que estamos supondo fixada) foi escolhida de modo que $\gamma|[t_{j-1}, t_j]$ é uma geodésica minimizante, concluimos que $i(t)$ é zero em uma vizinhança de 0. Além disso, $i(t)$ é não decrescente, isto é, se $\bar{t} > t$, então $i(\bar{t}) \geq i(t)$. Com efeito, por definição de $i(t)$, existe um subespaço $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(0, t)$ tal que I_t é negativa definida em $\mathcal{U}$ e $\dim \mathcal{U} = i(t)$. Todo elemento $V \in \mathcal{U}$ se estende a um elemento $\overline{V} \in \mathcal{V}(0, \bar{t})$ definindo $\overline{V} = 0$ em $[t, \bar{t}]$. É claro que $I_t(V, V) = I_{\bar{t}}(\overline{V}, \overline{V})$. Pela definição de índice, $i(\bar{t}) \geq i(t)$, como havíamos afirmado.

Para obter outras propriedades de $i(t)$ procederemos da maneira seguinte. Primeiro, observamos que por definição, $i(t)$ não depende da escolha da subdivisão normal de $[0, a]$; podemos, portanto, escolher tal subdivisão de modo que $t \in (t_{j-1}, t_j)$. Em seguida, observamos que o índice de I_t é o índice da restrição de I_t ao subespaço $\mathcal{V}^-(0, t)$; tal restrição será ainda indicada por I_t. Então, como cada elemento de $\mathcal{V}^-(0, t)$ é determinado pelo seu

valor nos pontos $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{j-1})$, temos que $\mathcal{V}^-(0,t)$ é isomorfo à soma direta

$$\mathcal{V}^-(0,t) = T_{\gamma(t_1)}M \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_{j-1})}M = S_j\,.$$

Decorre daí que fazendo t variar em (t_{j-1}, t_j), os espaços $\mathcal{V}^-(0,t)$ são isomorfos entre si e isomorfos a S_j. Podemos, portanto, considerar as formas quadráticas I_t como uma família de formas quadráticas em um espaço fixo S_j. Além disto, como os elementos de $\mathcal{V}^-(0,t)$ são campos de Jacobi "quebrados", decorre de (2) que I_t depende continuamente de $t \in (t_{j-1}, t_j)$.

Podemos agora obter mais informações sobre $i(t)$ que serão colecionadas nos lemas abaixo.

2.7 Lema. *Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $i(t-\varepsilon) = i(t)$.*

Demonstração do Lema 2.7: Como $i(t)$ é não decrescente, $i(t) \geq i(t-\varepsilon)$, para todo ε. Por outro lado, se I_t é negativa definida em um subespaço $\overline{S} \subset S_j$, com $\dim(\overline{S}) = i(t)$, então, por continuidade de I_t, existe $\varepsilon > 0$ tal que $I_{t-\varepsilon}$ ainda é negativa definida em $\overline{S}$, donde $i(t-\varepsilon) \geq i(t)$. Portanto $i(t) = i(t-\varepsilon)$. □

Seja agora d a nulidade de I_t; observe que $d = 0$ se $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$.

2.8 Lema. *Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $i(t+\varepsilon) = i(t) + d$.*

Demonstração do Lema 2.8: Mostraremos primeiro que $i(t+\varepsilon) \leq i(t) + d$. Com efeito, como $\dim(S_j) = n(j-1)$, I_t é positiva definida em um subespaço de dimensão $n(j-1) - i(t) - d$. Por continuidade, $I_{t+\varepsilon}$ é ainda positiva definida neste subespaço, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo

$$i(t+\varepsilon) \leq n(j-1) - \{n(j-1) - i(t) - d\} = i(t) + d.$$

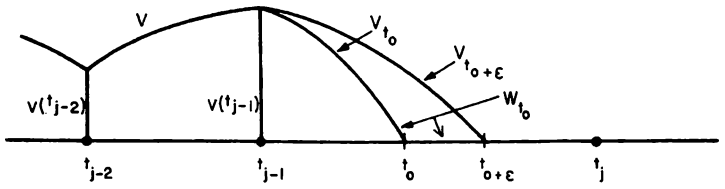


Figura 1

Para mostrar a desigualdade oposta, necessitaremos do Lema do Índice (Lema 2.2. do Cap. X). Seja $V \in S_j$, com $V(t_{j-1}) \neq 0$, e indiquemos com V_{t_0} o campo de Jacobi "quebrado" que concide com $V(t_i)$ em t_i, $i = 1, \ldots, j-1$, e que se anula no ponto $t_0 \in (t_{j-1}, t_j)$. Afirmamos que

$$I_{t_0}(V_{t_0}, V_{t_0}) > I_{t_0+\varepsilon}(V_{t_0+\varepsilon}, V_{t_0+\varepsilon}).$$

Com efeito, se indicarmos por W_{t_0} (v. Fig. 1) o campo de vetores definido ao longo de $\gamma([0, t_0 + \varepsilon])$ por

$$\begin{aligned} W_{t_0}(t) &= V_{t_0}(t), \quad t \in [0, t_0], \\ W_{t_0}(t) &= 0, \qquad\quad t \in [t_0, t_0 + \varepsilon] \end{aligned}$$

teremos, pelo Lema do Índice,

$$I_{t_0}(V_{t_0} V_{t_0}) = I_{t_0+\varepsilon}(W_{t_0}, W_{t_0}) > I_{t_0+\varepsilon}(V_{t_0+\varepsilon}, V_{t_0+\varepsilon}),$$

onde a última desigualdade é estrita, pois W_{t_0} não é um campo de Jacobi. Isto prova a afirmação feita.

Logo, se $V \in S_j$ e $I_t(V, V) \leq 0$, então $I_{t+\varepsilon}(V, V) < 0$. Portanto, se I_t é negativa definida em um subespaço $\overline{S} \subset S_j$, $I_{t+\varepsilon}$ ainda será negativa definida na soma direta de $\overline{S}$ com o espaço nulo de I_t. Logo

$$i(t + \varepsilon) \geq i(t) + d,$$

o que, junto com a desigualdade anterior implica que $i(t + \varepsilon) = i(t) + d$. Note que se $V(t_{j-1}) = 0$, ou V é identicamente nulo,

ou V é um campo de Jacobi "quebrado". Em ambos os casos, V não contribui para a nulidade d. □

As informações que obtivemos sobre $i(t)$ permitem descrever $i(t)$ como uma função que é zero em uma vizinhança da origem, é contínua à esquerda e tem descontinuidade tipo "salto" nos pontos conjugados a $\gamma(0)$, o salto sendo precisamente igual a multiplicidade do ponto conjugado (v. Fig. 2). Mas este é precisamente o enunciado do Teorema do Índice. □

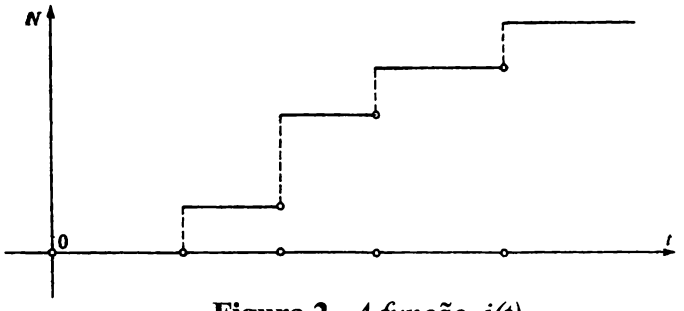


Figura 2. *A função i(t)*

2.9 Corolário (Jacobi). *Seja* $\gamma\colon [0,a] \to M$ *um segmento de geodésica em* M *tal que* $\gamma(a)$ *não seja conjugado a* $\gamma(0)$. *Então* γ *não possui pontos conjugados em* $(0,a)$ *se e somente se para toda variação própria de* γ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $E(s) > E(0)$ *para* $0 < |s| < \delta$. *Em particular, se* γ *é minimizante,* γ *não possui pontos conjugados em* $(0,a)$.

2.10 Corolário. *O conjunto dos pontos conjugados ao longo de uma geodésica é um conjunto discreto.*

2.11 Observação. O teorema do índice pode ser generalizado para o caso em que os pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(a)$ podem se deslocar sobre subvariedades. Veja-se W. Ambrose [Am 2]. Para uma versão extremamente geral do teorema do índice, v. S. Smale [Sm].

2.12 Observação. O fato de que o índice e a nulidade de I são finitas reflete o fato fundamental que a "variedade de dimensão infinita" $\Omega_{p,q} = \Omega$ mencionada na Observação 2.7 do Capítulo IX

pode ser substituída, em certas condições, por uma variedade de dimensão finita. Este foi o ponto de vista original de Morse para demonstrar seu teorema. Para algumas aplicações (cf. o Teorema de Esfera, Prop. 3.1), convém ter em mente esta construção que pode ser resumida do modo seguinte. (Para maiores detalhes, v. Milnor [Mi], pp. 88-92).

Seja Ω^c (resp. $\overset{\circ}{\Omega}{}^c$) o subconjunto de Ω formado pelas curvas de Ω de energia $\leq c$ (resp. $< c$). É claro que as curvas de Ω^c estão contidas em um subconjunto compacto $S \subset M$. Seja $\delta > 0$ tal que dados dois pontos de S à distância menor do que δ, existe uma única geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Suponha que as curvas de Ω^c estão definidas em $[0,1]$ e divida $[0,1]$ por pontos t_i, $i = 0, \ldots, k$, de modo que $|t_i - t_{i-1}| < \frac{\delta^2}{c}$. Seja $B \subset \Omega^c$ (resp. $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\Omega}{}^c$) o conjunto das geodésicas quebradas em t_i, isto é, $w \in B$ se $w(0) = p$, $w(1) = q$, e $w|(t_{i-1}, t_i) = w_i$ é uma geodésica ligando $w(t_{i-1})$ a $w(t_i)$. Uma tal geodésica é inteiramente determinada pelos pontos $w(t_i)$ pois

$$L^2(w_i) = (t_i - t_{i-1})E(w_i) < \delta^2;$$

A correspondência

$$w \to (w(t_1), \ldots, w(t_{k-1})) \in M \times \cdots \times M, \quad w \in \overset{\circ}{B},$$

é bijetiva e leva $\overset{\circ}{B}$ em um aberto de $M \times \cdots \times M$. Isto permite introduzir uma estrutura diferenciável (de dimensão finita) em $\overset{\circ}{B}$. Observe que o espaço tangente $T_w(\overset{\circ}{B})$ de uma geodésica quebrada w corresponde ao conjunto de campos de Jacobi ao longo de w, quebrados em t_i. É possível mostrar que existe uma homotopia $h_s \colon \overset{\circ}{\Omega}{}^c \to \overset{\circ}{\Omega}{}^c$, $s \in [0,1]$ com $h_0 = \text{ident.}$ e $h_1 \colon \overset{\circ}{\Omega}{}^c \to \overset{\circ}{B}$, isto é $\overset{\circ}{B}$ é um "retrato de deformação" de $\overset{\circ}{\Omega}{}^c$.

Restringindo a energia E a uma função $\overline{E}$ em $\overset{\circ}{B}$, verifica-se que as geodésicas γ de $\overset{\circ}{\Omega}{}^c$ estão na variedade $\overset{\circ}{B}$ e são precisamente os pontos críticos de $\overline{E}$. Além disso, o índice a a nulidade

de I em γ coincidem com o índice e a nulidade, respectivamente, do hessiano de $\overline{E}$ em γ, pois pelo Corolário 2.6 eles coincidem com o índice e a nulidade, respectivamente, de I restrito aos campos de Jacobi quebrados ao longo de γ.

Deste modo, para muitos efeitos, podemos substituir o conjunto $\overset{\circ}{\Omega}{}^c$ por sua aproximação de dimensão finita $\overset{\circ}{B}$.

Exercícios

1. Prove a seguinte versão do Teorema de Bonnet-Myers: *Se M é completa e a curvatura seccional K satisfaz $K \geq \delta > 0$, então M é compacta e* $\operatorname{diam} M \leq \pi/\sqrt{\delta}$, usando o Teorema de Comparação de Rauch e o teorema de Jacobi.
   Sugestão: Comparando M com uma esfera de curvatura δ, conclui-se, pelo Teorema de Rauch, que o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de uma geodésica normalizada $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ não ocorre depois de $\gamma(\pi/\sqrt{\delta})$. Portanto uma geodésica de comprimento maior do que $\pi/\sqrt{\delta}$ contém pontos conjugados. Pelo teorema de Jacobi, tal geodésica não é minimizante.

2. Demonstre a seguinte desigualdade sobre funções reais. Seja $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ uma função real de classe C^2 tal que $f(0) = f(\pi) = 0$. Então

$$\int_0^\pi f^2\,dt \leq \int_0^\pi (f')^2\,dt,$$

   e a igualdade ocorre se e só se $f(t) = c \operatorname{sen} t$, onde c é uma constante. (No próximo exercício, utilizaremos este fato para demonstrar um fato geométrico interessante).
   Sugestão: Uma solução geométrica é a seguinte. Considere uma geodésica γ normalizada ligando os pontos antípodas p e $-p$ de uma esfera unitária S^2. Seja $v(t)$ um campo paralelo ao longo de γ, com $\langle v, \gamma' \rangle = 0$, $|v| = 1$. Faça $V =$

fv e calcule a segunda variação para o vetor variacional V, obtendo

$$I_\pi(V,V) = \int_0^\pi (f')^2\,dt - \int_0^\pi f^2\,dt.$$

Pelo teorema do índice de Morse, $I_\pi(V,V) \geq 0$, o que fornece a desigualdade. Para a igualdade, use o fato que $I_\pi(V,V) = 0$ implica que V é um campo de Jacobi.

3. Seja M^2 uma variedade Riemanniana de dimensão dois completa e simplesmente conexa. Suponha que para todo ponto $p \in M$, o lugar $C(p)$ dos (primeiros) pontos conjugados de p se reduz a um único ponto $q \neq p$ e que $d(p, C(p)) = \pi$. Prove que, se a curvatura seccional K de M satisfaz $K \leq 1$, então M é isométrica à esfera S^2 com curvatura constante 1.
Sugestão: Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica normalizada $\gamma\colon [0,\pi] \to M$ ligando p a q com $J(0) = J(\pi) = 0$, $\langle J, \gamma'\rangle = 0$. Escolhendo campos $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, \gamma'$ paralelos e ortonormais ao longo de γ, podemos escrever $J = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$. Então, indicando $K(t) = K(\gamma', J)$, usando integração por partes e o Exercício 2, teremos

$$\begin{aligned} 0 = I_\pi(J,J) &= -\int_0^\pi \langle J'' + R(\gamma', J)\gamma', J\rangle\,dt \\ &= -\int_0^\pi \Big(\sum_i a_i'' a_i\Big)dt - \int_0^\pi K(t)\Big(\sum_i a_i^2\Big)dt \\ &= \int_0^\pi \sum_i (a_i')^2\,dt - \int_0^\pi K(t)\Big(\sum_i a_i^2\Big)dt \\ &\geq \sum_i \int_0^\pi a_i^2(1 - K(t))\,dt \geq 0. \end{aligned}$$

Conclui-se que $K(t) \equiv 1$.

4. Seja $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $a(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, e $a(0) > 0$. Prove que a solução da equação dife-

rencial

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\varphi = 0$$

com condições iniciais $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, possui pelo menos um zero positivo e um zero negativo.

5. Suponha que M^n seja uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional estritamente positiva e seja $\pi\colon (-\infty, \infty) \to M$ uma geodésica normalizada de M. Mostre que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o segmento $\gamma([-t_0, t_0])$ tem índice maior ou igual do que $n - 1$.
Sugestão: Seja Y um campo paralelo ao longo de γ com $\langle Y, \gamma' \rangle = 0$, $|Y| = 1$. Faça

$$\varphi_Y(t) = \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y \rangle, \quad K(t) = \inf_Y \varphi_Y(t),$$

e seja $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$0 \leq a(t) \leq K(t), \quad 0 < a(0) < K(0).$$

Seja φ a solução de $\varphi'' + a\varphi = 0$ com $\varphi'(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$, e sejam $-t_1, t_2$ os zeros dados pelo Exercício 4. Mostre que para o campo $X = \varphi Y$ a forma do índice fornece

$$I_{[-t_1, t_2]}(X, X) < -\int_{-t_1}^{t_2} (\varphi'' + a\varphi)\varphi \, dt = 0.$$

6. Uma *linha* em uma variedade Riemanniana completa é uma geodésica $\gamma\colon (-\infty, \infty) \to M$ que minimiza o comprimento de arco entre dois quaisquer de seus pontos. Mostre que se a curvatura seccional K de M é estritamente positiva, M não possui linhas. Dê um exemplo mostrando que o resultado é falso se $K \geq 0$.

Capítulo XII

O Grupo Fundamental das Variedades de Curvatura Negativa

1 Introdução

Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K < 0$. Uma informação fundamental sobre a topologia de M é que o recobrimento universal de M é difeomorfo ao $\mathbb{R}^n$ (Cf. Teorema de Hadamard, Cap. VII). Neste capítulo, obteremos informações sobre o grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M.

A importância de estudar $\pi_1(M)$, quando M tem curvatura negativa, provém do fato que, em um certo sentido, toda a topologia de M está contida em $\pi_1(M)$. Mais precisamente, se estudam em Topologia Algébrica certos invariantes topológicos, chamados grupos de homotopia de dimensão $k \geq 1$, que generalizam o grupo fundamental (= grupo de homotopia de dimensão um). Tais grupos podem ser definidos, a grosso modo, como classes de homotopia de aplicações $f\colon S^k \to M$ de esferas S^k de dimensão k em M. É possível provar (v. M. Greenberg [Gb], pg. 32) que se M é recoberta pelo $\mathbb{R}^n$, então toda tal f é homotópica

a uma constante se $k \geq 2$. Isto significa que os grupos de homotopia de dimensão superior a um são triviais e que, portanto, ao nível de homotopia, as informações sobre a topologia de M estão contidas em $\pi_1(M)$.

O objetivo do capítulo é demonstrar o Teorema de Preissman que afirma o seguinte: Se M é compacta e $K < 0$ então todo subgrupo abeliano não-trivial de $\pi_1(M)$ é cíclico infinito. Isto mostra, por exemplo, que o toro $S^1 \times S^1 \times S^1$ cujo grupo fundamental é $Z \oplus Z \oplus Z$ não pode ser munido de uma métrica de curvatura estritamente negativa.

Na Seção 2 introduziremos algumas noções importantes e demonstraremos um teorema de E. Cartan sobre existência de geodésicas fechadas que não usa hipótese alguma sobre a curvatura. Na Seção 3 demonstraremos o Teorema de Preissman. Demonstraremos também que se M é compacta e $K < 0$, então $\pi_1(M)$ não é abeliano. Finalmente, demonstraremos que é possível substituir no enunciado do Teorema de Preissman, a condição "subgrupo abeliano" pela condição mais fraca "subgrupo solúvel".

2 Existência de geodésicas fechadas

Indicaremos por $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ o recobrimento universal de uma variedade Riemanniana completa M com a métrica do recobrimento e por $A(\widetilde{M})$ o grupo das transformações de recobrimento de $\widetilde{M}$ (automorfismos do recobrimento). Observe que os elementos diferentes da identidade de $A(\widetilde{M})$ são isometrias sem pontos fixos de $\widetilde{M}$ e que $A(\widetilde{M})$ é isomorfo a $\pi_1(M;p)$, $p \in M$ (cf. Massey [Ma]). Convém recordar que este isomorfismo depende da escolha de um ponto $\tilde{p} \in \widetilde{M}$, com $\pi(\tilde{p}) = p$, e faz corresponder a cada $g \in \pi_1(M;p)$ uma isometria $\alpha_{\tilde{p}} \in A(\widetilde{M})$ definida do seguinte modo: Se $\tilde{q} \in \widetilde{M}$, liga-se $\tilde{q}$ a $\tilde{p}$ por um caminho $\tilde{\sigma}$, faz-se $\pi(\tilde{\sigma}) = \sigma$ e $\beta = \sigma^{-1}g\sigma$, onde, por abuso de notação, indicamos também por g um caminho na classe g. No que se segue, se

$\beta\colon [0,1] \to M$ é um caminho em M, $\tilde{\beta}_{\tilde{q}}(1)$ indicará o ponto final do levantamento em $\widetilde{M}$ de β a partir de $\tilde{q}$. Tomando $\beta = \sigma g \sigma^{-1}$, definimos

$$\alpha_{\tilde{p}}(\tilde{q}) = \tilde{\beta}_{\tilde{q}}(1).$$

2.1 Definição. Um conjunto $\mathcal{L}$ de caminhos fechados em M é chamado uma *classe livre de homotopia* se quando $f \in \mathcal{L}$, e $g\colon I \to M$ é tal que existe uma homotopia

$$F\colon I \times I \to M,\ F(0,t) = f(t),\ F(1,t) = g(t),\ F(s,0) = F(s,1),$$

então $g \in \mathcal{L}$. O conjunto de tais classes será indicado por $C_1(M)$.

A diferença entre a definição acima e a de grupo fundamental é que na classe livre permitimos que as origens dos caminhos variem em M.

O teorema abaixo mostra que em uma variedade Riemanniana compacta M com $\pi_1(M) \neq \{e\}$ existe sempre uma *geodésica fechada*, isto é, uma curva fechada que é geodésica em todos os seus pontos. Convém distinguir uma geodésica fechada de um *laço geodésico* que é uma curva fechada que é geodésica em todos menos um de seus pontos, onde ela deixa de ser regular (v. Fig. 1).

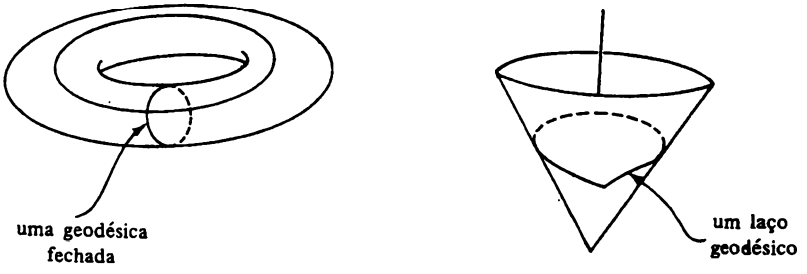


Figura 1

2.2 Teorema (Cartan). *Se M é compacta e $\mathcal{L} \in C_1(M)$ não é a classe constante, então existe uma geodésica fechada de M na classe $\mathcal{L}$.*

Demonstração: Seja d o ínfimo dos comprimentos das curvas diferenciáveis por partes pertencentes a $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ é não trivial, $d > 0$. Seja γ_j uma seqüência de curvas diferenciáveis por partes pertencentes a $\mathcal{L}$ tal que $\ell(\gamma_j) \to d$. Podemos supor que γ_j é uma geodésica quebrada definida no intervalo $[0,1]$ parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Seja $L = \sup \ell(\gamma_j)$. Então

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_j'(t)|\, dt \leq L(t_2 - t_1),$$

para todo $t_1 \leq t_2 \in [0,1]$. Portanto o conjunto $\{\gamma_j\}$ é equicontínuo. Como M é compacta, existe uma subseqüência de γ_j, que indicaremos ainda por γ_j, que converge uniformemente para uma curva fechada contínua $\gamma_0 \colon [0,1] \to M$.

Seja agora $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ uma partição do intervalo $[0,1]$ tal que $\gamma_0\big|_{[t_{i-1},t_i]}$, $i = 1, \ldots, k$, está contida em uma vizinhança totalmente normal. Seja $\gamma \colon [0,1] \to M$ a curva diferenciável por partes tal que $\gamma^i = \gamma\big|_{[t_{i-1},t_i]}$ é o único segmento de geodésica que liga os pontos $\gamma_0(t_{i-1})$ e $\gamma_0(t_i)$. É claro que $\gamma \in \mathcal{L}$, onde $\ell(\gamma) \geq d$. Vamos mostrar que $\ell(\gamma) = d$.

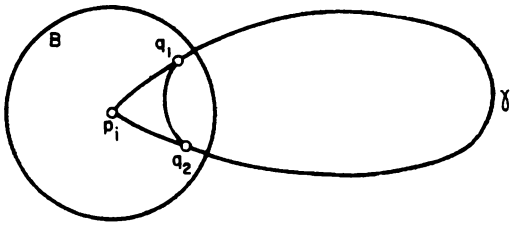


Figura 2

Suponhamos que $\ell(\gamma) > d$ e seja $\varepsilon = \frac{\ell(\gamma)-d}{2k+1}$. Existe um inteiro j tal que

$$\ell(\gamma_j) - d < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(\gamma_j(t), \gamma_0(t)) < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1].$$

Indicando por $\gamma_j^i = \gamma_j|_{[t_{i-1},t_i]}$, teremos

$$\sum_{i=1}^{k}(\ell(\gamma_j^i) + 2\varepsilon) = \ell(\gamma_j) + 2k\varepsilon < d + (2k+1)\varepsilon$$

$$= \ell(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \ell(\gamma^i).$$

Portanto, existe um inteiro i, $1 \leq i \leq k$, tal que

$$\ell(\gamma_j^i) + 2\varepsilon < \ell(\gamma^i),$$

o que contradiz o fato de ser γ^i minimizante e prova que $\ell(\gamma) = d$.

Parametrizemos γ pelo comprimento de arco. Então γ: $[0,d] \to M$ é uma geodésica quebrada que tem comprimento mínimo na classe $\mathcal{L}$. Vamos mostrar que γ é regular no ponto $p_i = \gamma(t_i)$, para todo $i = 0, \ldots, k$.

Suponhamos o contrário e seja B uma bola convexa centrada em p_i. Escolha pontos q_1 e q_2 em $\gamma \cap B$ de modo que o triângulo geodésico $p_i q_1 q_2$ seja homotópico a um ponto (v. Fig. 2). Então a curva fechada constituida pela geodésica minimizante $q_1 q_2$ e pelo arco de γ entre q_1 e q_2 que não contém p_i está na classe $\mathcal{L}$ e tem comprimento menor do que γ, o que é uma contradição. □

2.3 Observação. Se M não é compacta, o teorema é falso, como mostra o exemplo da Fig. 3. A Fig. 3 representa uma superfície de revolução gerada por uma curva que assintota o eixo de revolução. Como existem curvas arbitrariamente pequenas nas classes livres de homotopias que não são triviais, tais classes não admitem curvas de comprimento mínimo.

2.4 Observação. Se M é simplesmente conexa (e compacta), a existência de uma geodésica fechada em M, embora verdadeira, é um problema bem mais difícil. Em verdade, o problema de determinar o número e a natureza das geodésicas fechadas de uma variedade Riemanniana é um dos belos capítulos da Geometria. Uma boa referência é Klingenberg [Kℓ 4].

Para os nossos objetivos, é importante saber quando uma isometria de $\widetilde{M}$ sem pontos fixos deixa invariante uma geodésica.

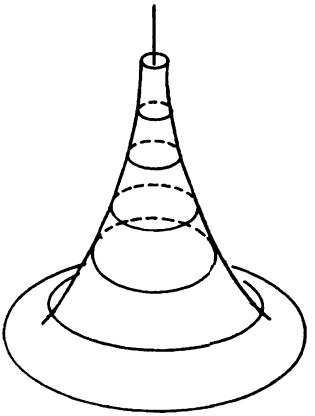


Figura 3. *Uma superfície que não possui geodésicas fechadas*

2.5 Definição. Uma isometria $f\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ sem pontos fixos é uma *translação* de $\widetilde{M}$ se deixa invariante alguma geodésica $\tilde{\gamma}$ de $\widetilde{M}$, isto é, se $f(c) = c$, onde $c = \tilde{\gamma}((-\infty, \infty))$. Neste caso, diremos que f é uma *translação ao longo* de $\tilde{\gamma}$.

2.6 Proposição. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e α uma transformação de recobrimento de $\widetilde{M}$ considerada com a métrica do recobrimento. Então α é uma translação de $\widetilde{M}$.*

Demonstração: Seja $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ e seja $g \in \pi_1(M; p)$, $p = \pi(\tilde{p})$, o elemento corresponde a α pelo isomorfismo mencionado no início desta Seção. Podemos supor $\alpha \neq \text{ident}$. Pelo Teorema de Cartan, existe uma geodésica fechada γ de M na classe livre determinada por g. Escolha um ponto $q \in \gamma$. Então γ é homotópica a um caminho fechado $\sigma^{-1} g \sigma$, onde σ é um caminho ligando p a q. Seja $\tilde{q} = \tilde{\sigma}_{\tilde{p}}(1)$, isto é, $\tilde{q}$ é o ponto final de levantamento de σ a partir de $\tilde{p}$. Seja $\tilde{\gamma}$ o levantamento de γ a partir de $\tilde{q}$; vamos mostrar que α deixa $\tilde{\gamma}$ invariante.

Para isto, seja $\alpha_{\tilde{q}} \in A(\widetilde{M})$ a isometria correspondente à classe $[\gamma] \in \pi_1(M; q)$ e ao ponto $\tilde{q}$, no isomorfismo acima indicado.

Afirmamos que $\alpha_{\tilde{q}} = \alpha$. Com efeito, como γ é homotópica a $\sigma g \sigma^{-1}$, seus levantamentos a partir de $\tilde{q}$ têm o mesmo ponto final, isto é,

$$\alpha(\tilde{q}) = \alpha_{\tilde{q}}(\tilde{q}).$$

Portanto, $\tilde{q}$ é um ponto fixo de $\alpha \circ \alpha_{\tilde{q}}^{-1}$, e a afirmação feita decorre facilmente.

Decorre daí que se $\tilde{\gamma}(s)$ é um ponto de levantamento de γ a partir de $\tilde{q}$, teremos, por unicidade do levantamento,

$$\alpha(\tilde{\gamma}(s)) = \alpha_{\tilde{q}}(\tilde{\gamma}(s)) \in \tilde{\gamma},$$

o que mostra que $\tilde{\gamma}$ é invariante por α, e demonstra a Proposição. □

3 O Teorema de Preissman

Um *triângulo geodésico* T em uma variedade Riemanniana M é um conjunto formado por três segmentos de geodésicas minimizantes normalizadas (chamadas *lados* do triângulo)

$$\gamma_1 \colon [0, \ell_1] \to M, \quad \gamma_2 \colon [0, \ell_2] \to M, \quad \gamma_3 \colon [0, \ell_3] \to M,$$

de modo que $\gamma_i(\ell_i) = \gamma_{i+1}(0)$, $i = 1, 2$ e $\gamma_3(\ell_3) = \gamma_1(0)$. Os pontos terminais dos segmentos de geodésicas são chamados *vértices* de T. O ângulo

$$\measuredangle(-\gamma_i'(\ell_i), \gamma_{i+1}'(0)), \quad i = 1, 2,$$

ou

$$\measuredangle(-\gamma_3'(\ell_3), \gamma_1'(0)),$$

é chamado o *ângulo* (interno) do vértice correspondente.

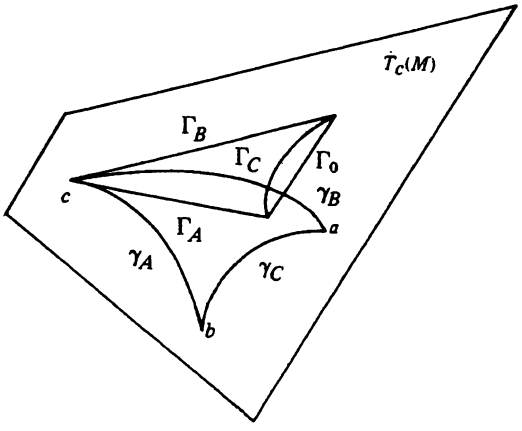


Figura 4

3.1 Lema. *Seja $\widetilde{M}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura $K \leq 0$. Sejam a, b e c três pontos de $\widetilde{M}$. Tais pontos determinam um único triângulo geodésico T de $\widetilde{M}$ com vértices a, b e c. Sejam α, β e γ os ângulos dos vértices a, b, c, respectivamente, e sejam A, B, C os comprimentos dos lados opostos aos vértices a, b c, respectivamente. Então*

(i) $A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \leq C^2 \quad (< C^2,\ se\ K < 0)$

(ii) $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi \quad (< \pi,\ se\ K < 0)$.

Demonstração: Sejam γ_A, γ_B, γ_C as geodésicas de comprimentos $\ell(\gamma_A) = A$, $\ell(\gamma_B) = B$, $\ell(\gamma_C) = C$ que formam os lados de T. Sejam $\Gamma_A = \exp_c^{-1}(\gamma_A)$, $\Gamma_B = \exp_c^{-1}(\gamma_B)$ e $\Gamma_C = \exp_c^{-1}(\gamma_C)$ curvas em $T_c(\widetilde{M})$. Como γ_A e γ_B são geodésicas, radiais de origem c, temos

$$A = \ell(\gamma_A) = \ell(\Gamma_A), \quad B = \ell(\gamma_B) = \ell(\Gamma_B).$$

Além disto, indicando por Γ_0 o segmento de reta em $T_c(\widetilde{M})$ que liga as extremidades de Γ_C, temos que $\ell(\Gamma_0) \leq \ell(\Gamma_C)$ (v. Fig. 4) e

$$\ell(\Gamma_0)^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

Como $K \leq 0$ e $T_c(\widetilde{M})$ tem curvatura nula, podemos aplicar a Proposição 2.5 do Capítulo 10 (aplicação do teorema de Rauch) e obter que

$$\ell(\Gamma_C) \leq \ell(\gamma_C) \quad (<, \text{ se } K < 0).$$

Conclui-se daí que

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \leq \ell(\Gamma_C)^2 \leq \ell(\gamma_C)^2 = C^2 \ (<, \text{ se } K < 0),$$

o que demonstra (i).

Para demonstrar (ii), observamos que

$$C = d(a,b), \quad B = d(a,c), \quad A = d(b,c)$$

e, portanto, cada comprimento A, B ou C é majorado pela soma dos outros dois. Podemos então encontrar no espaço euclideano $T_c(\widetilde{M})$ um triângulo cujos lados têm comprimentos A, B e C. Indicando os ângulos opostos deste triângulo por α', β' e γ', respectivamente, obtemos de (i),

$$\alpha \leq \alpha', \quad \beta \leq \beta', \quad \gamma \leq \gamma' \qquad (<, \text{ se } K < 0).$$

Como $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, segue-se (ii). □

De agora por diante, M indicará uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K < 0$. Como sempre, $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ indicará o recobrimento universal de M com a métrica do recobrimento. O nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema.

3.2 Teorema (Preissman [Pr]). *Se M é uma variedade Riemanniana compacta de curvatura negativa, então todo subgrupo abeliano diferente da identidade do grupo fundamental $\pi_1(M)$ é cíclico infinito.*

A demonstração depende de uma série de lemas.

3.3 Lema. *Se $K < 0$ e $f\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ é uma translação ao longo da geodésica $\tilde{\gamma}$, $f \neq$ id., então $\tilde{\gamma}$ é a única geodésica invariante por f.*

Demonstração: Suponhamos que f deixa invariante duas geodésicas $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$. Como f não tem pontos fixos, $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \emptyset$; caso contrário, $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2$ tem pelo menos dois pontos, o que contradiz o fato que a aplicação exponencial é um difeomorfismo em $\widetilde{M}$ (teorema de Hadamard). Sejam $\tilde{p}_1 \in \tilde{\gamma}_1$, $\tilde{p}_2 \in \tilde{\gamma}_2$, e seja $\tilde{\gamma}_3$ a geodésica minimizante ligando $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$. Consideremos o "quadrilátero geodésico" $\tilde{p}_1$, $f(\tilde{p}_1)$, $\tilde{p}_2$, $f(\tilde{p}_2)$ em $\widetilde{M}$ (Fig. 5) e indiquemos os seus ângulos (internos) por α, $\pi - \alpha'$ (adjacentes ao lado $\tilde{\gamma}_1$), β, $\pi - \beta'$ (adjacentes ao lado $\tilde{\gamma}_2$). Como f é uma isometria, $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Portanto, a soma dos ângulos internos de um tal quadrilátero é igual a 2π. Dividamos agora este quadrilátero em dois triângulos T_1 e T_2 e indiquemos por $\sum_i$ a soma dos ângulos internos do triângulo T_i, $i = 1, 2$. É claro que, em cada vértice, a soma dos ângulos dos triângulos que aí chegam é maior ou igual que o ângulo do quadrilátero neste vértice. Portanto $\sum_1 + \sum_2 \geq 2\pi$. Decorre daí que um dos dois triângulos tem uma soma dos ângulos internos $\geq \pi$, o que contradiz o Lema 3.1 (ii). □

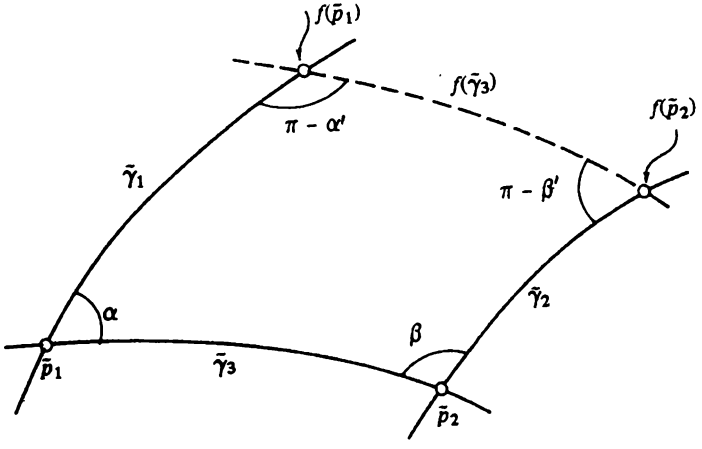


Figura 5

3.4 Lema. *Se $K < 0$ e $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ é uma isometria sem pontos fixos que comuta com uma translação f ao longo de $\tilde{\gamma}$, $f \neq \mathrm{id}$., então g é uma translação ao longo de $\tilde{\gamma}$.*

Demonstração: Basta observar que

$$f \circ g(\tilde{\gamma}) = g \circ f(\tilde{\gamma}) = g(\tilde{\gamma}),$$

donde, pela unicidade do lema anterior $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. □

3.5 Lema. *Se todos os elementos de um subgrupo não-trivial $H \subset \pi_1(M)$, considerados como isometrias de $\widetilde{M}$, deixam invariante uma geodésica fixa $\tilde{\gamma}$, então H é cíclico infinito.*

Demonstração: Fixe um ponto $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$ como origem e considere a aplicação $\theta\colon H \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(h) = \pm d(\tilde{p}, h(\tilde{p}))$, onde o sinal $-$ ou $+$ é usado conforme $h(\tilde{p})$ está "antes"ou "depois"de $\tilde{p}$, respectivamente, na orientação de $\tilde{\gamma}$. Como os elementos de H são isometrias que deixam $\tilde{\gamma}$ invariante, θ é um homomorfismo de H no grupo aditivo dos reais $\mathbb{R}$. θ é um homomorfismo injetivo; caso contrário, $h_1(\tilde{p}) = h_2(\tilde{p})$, com $h_1 \neq h_2$, donde $\tilde{p}$ seria um ponto fixo de $h_1 h_2^{-1}$. Portanto, H é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Mas todo subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ ou é denso em $\mathbb{R}$ ou é cíclico infinito. Como as isometrias de H operam de modo totalmente descontínuo, H não é denso. Logo H é cíclico infinito. □

Demonstração do Teorema de Preissman: Seja $H \subset \pi_1(M)$ um subgrupo abeliano com $H \neq \{e\}$. Pela Proposição 2.8 e pelos Lemas 3.3 e 3.4, existe uma única geodésica $\tilde{\gamma}$ que é invariante por todos os elementos de H. Pelo Lema 3.5, H é cíclico infinito. □

3.6 Exemplo. Seja N uma superfície de gênero dois e seja $M = N \times S^1$ a variedade produto de N por um círculo S^1. Então M não possui uma métrica de curvatura negativa. Com efeito, se $C \subset \pi_1(N)$ é um subgrupo cíclico, então $C \oplus \mathbb{Z} \subset \pi_1(M)$ é um subgrupo abeliano que não é cíclico.

3.7 Exemplo. O m-toro $S^1 \times \cdots \times S^1 = T^m$, $m \geq 2$, não possui métrica de curvatura negativa, pois o seu grupo fundamental é $\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (m vezes).

A mesma técnica usada no Teorema de Preissman permite obter um resultado um pouco mais geral. Antes, precisamos de

um outro resultado sobre o grupo fundamental, também devido a Preissman.

3.8 Teorema. *Se M é compacta e $K < 0$, então $\pi_1(M)$ não é abeliano.*

Demonstração: Para demonstrar o pedido, demonstraremos o lema abaixo que é um pouco mais geral.

3.9 Lema. *Se M é completa, $K \leq 0$, e existe uma geodésica invariante pelos elementos de $A(\widetilde{M})$, então M não é compacta.*

Demonstração do Lema: Seja $\tilde{\gamma}$ a geodésica invariante pelos elementos de $A(\widetilde{M})$. Fixe um ponto $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$, um número real $t > 0$, e considere a geodésica normalizada $\tilde{\beta}\colon [0,t] \to \widetilde{M}$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{p}$, perpendicular a $\tilde{\gamma}$ em $\tilde{p}$. Sejam $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$, $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$, $p = \pi(\tilde{p})$, e α_t uma geodésica minimizante em M ligando $\beta(t)$ a p. Vamos mostrar que o comprimento $\ell(\alpha_t) = t$.

Seja $\tilde{\alpha}_t$ o levantamento de α_t a partir de $\tilde{\beta}(t)$. Como $\tilde{\gamma}$ é invariante, o ponto final de $\tilde{\alpha}_t$ pertence a $\tilde{\gamma}$. (V. Fig. 6). Como $K \leq 0$, pelo Lema 3.1 (i), $\ell(\tilde{\alpha}_t) \geq \ell(\tilde{\beta})$. Por outro lado,

$$\ell(\tilde{\alpha}_t) = \ell(\alpha_t) \leq \ell(\beta) = \ell(\tilde{\beta}) = t,$$

donde $\ell(\alpha_t) = t$, como havíamos afirmado.

Como t é arbitrário, M não é limitada, o que conclui a demonstração do Lema 3.9. □

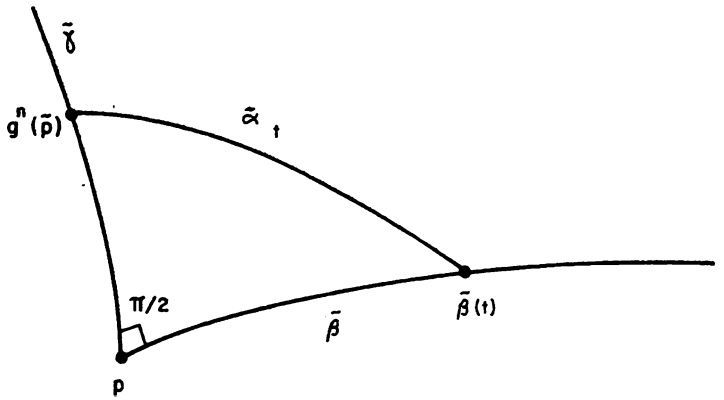


Figura 6

O teorema segue agora do fato que se M é compacta, $K < 0$ e $\pi_1(M)$ é abeliano, existe uma geodésica invariante por todos os elementos de $A(\widetilde{M})$. □

Podemos agora refinar o Teorema de Preissman e demonstrar o fato seguinte

3.10 Teorema (Byers, [4]). *Se M é compacta, $K < 0$, e H é um subgrupo solúvel de $\pi_1(M)$, $H \neq \{e\}$, então H é cíclico infinito. Além disto, $\pi_1(M)$ não possui subgrupo cíclico de índice finito.*

Demonstração: Como H é solúvel, existe uma seqüência finita de subgrupos

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_{k-1} \supset H_k = \{e\}$$

tal que H_{i+1} é normal em H_i e H_i/H_{i+1} é abeliano. Então H_{k-1} é abeliano, donde, pelo Teorema de Preissman, cíclico infinito.

Seja $g \in \pi_1(M)$ um gerador de H_{k-1} e seja $\tilde{\gamma}$ a geodésica de $\widetilde{M}$ invariante por g. Sejam $a \in H_{k-2}$ e $b \in H_{k-1}$. Como $a^{-1}b^{-1}ab \in H_{k-1}$, temos, para algum inteiro n,

$$a^{-1}b^{-1}ab = g^n.$$

Decorre daí que

$$a^{-1}b^{-1}ab(\tilde{\gamma}) = g^n(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}.$$

Como $b \in H_{k-1}$, $b(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Logo $b^{-1}a(\tilde{\gamma}) = a(\tilde{\gamma})$, isto é, b^{-1} deixa invariante a geodésica $a(\tilde{\gamma})$. Por unicidade, $a(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Portanto, todos os elementos de H_{k-2} deixam $\tilde{\gamma}$ invariante. Pelo Lema 3.5, H_{k-2} é cíclico infinito.

Repetindo o argumento acima um número finito de vezes, concluiremos que H é cíclico infinito, o que demonstra a primeira afirmação do teorema.

Para provar a afirmação final, suponhamos que existe um subgrupo $H \subset \pi_1(M)$, cíclico e de índice finito. Seja g um gerador de H e seja $\tilde{\gamma}$ a geodésica de $\widetilde{M}$ invariante por g. Seja

$a \in \pi_1(M) - H$. Como H tem índice finito, existem inteiros m e n tais que $a^n = g^m$. Logo

$$a^n(\tilde{\gamma}) = g^m(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}.$$

Por unicidade $a(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$, para todo $a \in \pi_1(m) - H$. Decorre daí que todos os elementos de $\pi_1(M)$ deixam invariante a geodésica $\tilde{\gamma}$. Pelo Lema 3.5, $\pi_1(M)$ é cíclico infinito, o que contradiz o Teorema 3.8. □

3.11 Observação. Variedades Riemannianas de curvatura não-positiva formam um tópico amplo da Geometria Riemanniana, e apenas tocamos no assunto. Ao leitor interessado em alguns desenvolvimentos recentes, recomendamos o excelente "survey" de P. Eberlein, "Structure of manifolds of nonpositive curvature", in Global Differential Geometry and Global Analysis 1984, Proceedings, Berlin, edited by D. Ferus, R. Gardner, S. Helgason and U. Simon, Lecture Notes in Math. 156, Springer Verlag, 1985, pp. 86-153. Outras relações entre a geometria de uma variedade M de curvatura não-positiva e $\pi_1(M)$ são descritas na Seção 7 deste "survey".

Capítulo XIII

O Teorema da Esfera

1 Introdução

Um dos mais belos resultados da Geometria Diferencial Global é o teorema da esfera que afirma o seguinte:

1.1 Teorema. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, cuja curvatura seccional K satisfaz*

$$0 < h\,K_{\max} < K \leq K_{\max}\,. \tag{1}$$

Então se $h = 1/4$, M é homeomorfa a uma esfera.

O número h é chamada o "pinching"de M. Multiplicando a métrica por uma constante, podemos supor que $K_{\max} = 1$, e (1) pode ser escrita, sem perda de generalidade, como

$$0 < h < K \leq 1. \tag{1'}$$

O teorema da esfera foi demonstrado pela primeira vez por Rauch [R 1] para $h \sim 3/4$. Uma contribuição fundamental foi dada por Klingenberg [Kℓ 1] que introduziu no problema a consideração do "cut locus"(v. Definição na Seção 2). No caso em que a dimensão de M é par, Klingenberg obteve em [Kℓ 1] uma estimativa para a distância de um ponto ao seu "cut locus"e provou

o teorema para $h \sim 0.55$. Utilizando o teorema de Toponogov e a estimativa acima mencionada, Berger [Br 1] obteve o teorema, ainda em dimensão par, com $h = 1/4$. A utilização do teorema de Toponogov é de fato desnecessária, como foi mostrado por Tsukamoto [Ts]. Finalmente, Klingenberg [Kℓ 2] estendeu a sua estimativa para dimensão ímpar, o que junto com o trabalho de Berger [Br 1] implica o teorema como enunciamos acima.

No caso de dimensão par, o teorema é falso se substituimos (1') por

$$0 < 1/4 \leq K \leq 1. \tag{2}$$

É possível mostrar (v. Exercício 12, Cap. VIII) que o espaço projetivo complexo $P^n(C)$, $n > 1$, é simplesmente conexo, compacto, possui uma métrica cuja curvatura seccional satisfaz (2) e não é homeomorfo a uma esfera. Em verdade, em [Br 1] Berger demonstrou que se (2) é satisfeita então: ou $\operatorname{diam}(M) > \pi$, e M é homeomorfa a uma esfera, ou $\operatorname{diam}(M) = \pi$, e M é isométrica a um espaço simétrico. (Para maiores detalhes, V. Cheeger e Ebin [CE].)

No caso de dimensão ímpar, sabe-se que o teorema ainda vale substituindo (1') por (2), mas ignora-se se este resultado pode ser melhorado.

Para dimensão dois e três, o teorema é válido supondo apenas $h \geq 0$, isto é, se M^n, $n = 2, 3$, é compacta simplesmente conexa e possui curvatura seccional positiva, então M^n é homeomorfa a S^n. Para $n = 2$ isto é uma conseqüência imediata do teorema de Gauss-Bonnet, e para $n = 3$, decorre de um resultado de Hamilton [H].

Neste capítulo apresentaremos uma exposição do teorema da esfera que não usa o teorema de Toponogov. Na Seção 2 introduzimos a noção de "cut locus"e estudaremos algumas de suas propriedades. Na Seção 3 obteremos uma estimativa para a distância de um ponto ao seu "cut locus". Em um ponto crucial da demonstração desta estimativa é necessário utilizar alguns fatos básicos de Teoria de Morse. Citaremos explicitamente os fatos necessários, com referências. Para dimensão par, a prova

desta estimativa pode ser feita sem o uso da Teoria de Morse. A fim de tornar possível uma apresentação do teorema da esfera, pelo menos no caso de dimensão par, independente da Teoria de Morse, apresentaremos aqui esta demonstração. Na Seção 4 demonstraremos o teorema da esfera e na Seção 5 mencionaremos alguns desenvolvimentos recentes.

Salvo menção explícita em contrário, as variedades consideradas neste capítulo serão completas e as geodésicas serão normalizadas.

2 O lugar dos pontos mínimos (cut locus)

Seja M uma variedade Riemanniana completa, seja $p \in M$ um ponto de M, e seja $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$. Já sabemos que se $t > 0$ é suficientemente pequeno, $d(\gamma(0),\gamma(t)) = t$, isto é, $\gamma([0,t])$ é uma geodésica minimizante. Além disto, se $\gamma([0,t_1])$ não é minimizante, o mesmo se passa para todo $t > t_1$. Por continuidade, o conjunto dos números $t > 0$ para os quais $d(\gamma(0),\gamma(t)) = t$ é da forma $[0,t_0]$ ou $[0,\infty)$. No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado o *ponto mínimo de p ao longo de γ*; no segundo caso, diz-se que tal ponto mínimo não existe.

Definimos o *lugar dos pontos mínimos de p* ("cut locus"de p), indicado por $C_m(p)$, como a união dos pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p.

Observe que se M é compacta, o seu diâmetro é finito, donde existe o ponto mínimo de qualquer ponto $p \in M$ ao longo de qualquer geodésica partindo de p. A recíproca deste fato é verdadeira e será provada adiante (v. Cor. 2.11).

2.1 Observação. Sob o nome de "ligne de partage"o cut locus foi introduzido para superfícies por H. Poincaré em 1905 [Po].

Para variedades Riemannianas, o cut locus foi introduzido por J.H. Whitehead em 1935, [Wh], que provou algumas das propriedades que apresentaremos adiante (v. pp. 700-704 de [Wh]). O interesse pelo cut locus foi reanimado em 1959 quando Klingenberg mostrou em [Kℓ 1] que a sua introdução é útil para melhorar o "pinching" do teorema da esfera.

Antes de apresentarmos alguns exemplos, convém demonstrarmos uma propriedade fundamental do cut locus.

2.2 Proposição. *Suponha que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo de γ. Então:*

a) *ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ,*

b) *ou existe uma geodésica $\sigma \neq \gamma$ de p a $\gamma(t_0)$ tal que $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$.*

Reciprocamente, se (a) *ou* (b) *se verifica, então existe $\tilde{t}$ em $(0, t_0]$ tal que $\gamma(\tilde{t})$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ.*

Demonstração: Seja t_0 nas condições do enunciado, e seja $\{t_0 + \varepsilon_i\}$ uma seqüência, onde $\varepsilon_i > 0$ e $\{\varepsilon_i\} \to 0$. Considere uma seqüência de geodésicas minimizantes σ_i ligando p a $\gamma(t_0 + \varepsilon_i)$ e seja $\{\sigma_i'(0)\} \in T_pM$ a seqüência de seus vetores tangentes em p. Como a esfera unitária de T_pM é compacta, podemos supor, tomando se necessário uma subseqüência, que $\{\sigma_i'(0)\}$ converge. Logo existe uma geodésica σ tal que $\sigma_i'(0) \to \sigma'(0)$. Por continuidade, σ é uma geodésica minimizante ligando p a $\gamma(t_0)$, isto é, $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$. Se $\sigma \neq \gamma$, a afirmação (b) é verificada. Se $\sigma = \gamma$, vamos mostrar que (a) se verifica. Como γ é minimizante até $\gamma(t_0)$, bastará mostrar que $d\exp_p$ é singular em $t_0\gamma'(0)$.

Suponhamos portanto que $\sigma'(0) = \gamma'(0)$ e que $d\exp_p$ não é singular em $t_0\gamma'(0)$. Então existe uma vizinhança U de $t_0\gamma'(0)$ onde $\exp_p$ é uma difeomorfismo (Fig. 1). Por definição de σ_j, $\gamma(t_0 + \varepsilon_j) = \sigma_j(t_0 + \varepsilon_j')$, onde $\varepsilon_j' \leq \varepsilon_j$, pois σ_j é minimizante. Tome ε_j suficientemente pequeno para que $(t_0 + \varepsilon_j')\sigma_j'(0)$ e

$(t_0 + \varepsilon_j)\gamma'(0)$ pertençam a U. Então

$$\exp_p(t_0 + \varepsilon_j)\gamma'(0) = \gamma(t_0 + \varepsilon_j)$$
$$= \sigma_j(t_0 + \varepsilon_j') = \exp_p(t_0 + \varepsilon_j')\sigma_j'(0),$$

donde $(t_0 + \varepsilon_j)\gamma'(0) = (t_0 + \varepsilon_j')\sigma_j'(0)$, isto é, $\gamma'(0) = \sigma_j'(0)$, o que contradiz a definição de t_0, e conclui a prova da primeira parte da proposição.

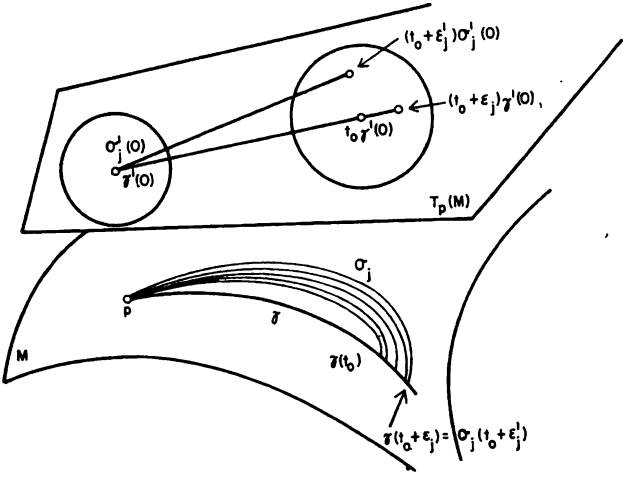


Figura 1

Reciprocamente, se (a) se verifica, como uma geodésica não minimiza distâncias depois do primeiro ponto conjugado, (v. Corolário 2.9 do Teorema do Índice, Cap. XI), o ponto mínimo de p ao longo de γ ocorre em $\gamma(\tilde{t})$, $\tilde{t} \leq t_0$.

Suponhamos agora que (b) se verifica. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $\sigma(t_0 - \varepsilon)$ e $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ estejam contidos em uma vizinhança totalmente normal de $\gamma(t_0)$, e consideremos a única geodésica minimizante τ que liga $\sigma(t_0 - \varepsilon)$ a $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ (Fig. 2). A curva $p\sigma(t_0 - \varepsilon) \cup \tau$ tem comprimento estritamente menor do que $t_0 + \varepsilon$. Portanto, o ponto mínimo de p ao longo de γ ocorre em $\gamma(\tilde{t})$, $\tilde{t} \leq t_0$. □

Agora estamos em condições de apresentar alguns exemplos.

2.3 Exemplo. Se M^n é a esfera S^n, e $p \in S^n$, o cut locus de p é o seu ponto antípoda. Observe que, neste caso, o cut locus de p coincide com o lugar dos pontos conjugados a p.

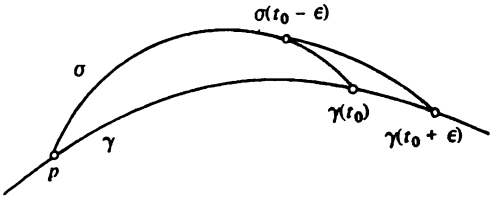


Figura 2

2.4 Exemplo. Se M^n é o espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$, obtido por identificação dos pontos antípodas de S^n, o cut locus de $[p, -p] \in P^n(\mathbb{R})$ é o subconjunto $P^{n-1}(\mathbb{R}) \subset P^n(\mathbb{R})$ obtido por identificação dos pontos antípodas do "equador" de p. Observe que o lugar dos pontos conjugados de $[p, -p]$ é o próprio $[p, -p]$.

2.5 Exemplo. Consideremos o toro plano T obtido por identificação dos lados opostos do quadrado $ABCD$ da Fig. 3. É imediato verificar que o cut locus do ponto A é o conjunto formado pelas mediatrizes dos segmentos BA e BC. Observe que o lugar dos pontos conjugados é vazio. Analogamente, o cut locus de um ponto de um cilindro em $\mathbb{R}^3$ é a "geratriz oposta" àquela que passa por p.

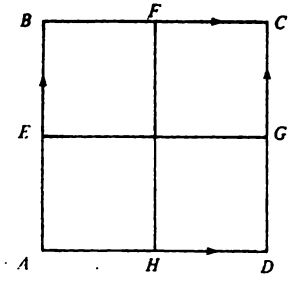


Figura 3

2.6 Observação. No Exemplo 2.3 as situações (a) e (b) da Proposição 2.2 ocorrem simultaneamente. No Exemplo 2.4 a situação (b) ocorre antes da situação (a). No Exemplo 2.5, apenas a situação (b) ocorre. No exemplo do elipsóide da Figura 4, exceto para duas direções, a situação (b) ocorre antes de ocorrer (a).

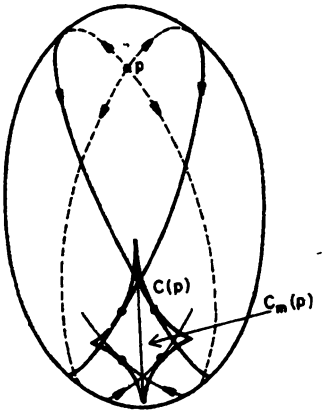


Figura 4

2.6' Observação. Uma variedade Riemanniana compacta M para a qual o cut locus $C_m(p)$ de todo ponto $p \in M$ se reduz a um único ponto é chamada uma *variedade wiedersehen.* Existe um resultado devido a L. Green [Gn] que as superfícies ($\dim M = 2$) wiedersehen são isométricas às esferas. Este resultado foi generalizado por M. Berger e J. Kazdan [Be, pp. 236-246] para o caso em que $\dim M$ é par, e por C.T. Yang [Yg] para o caso em que $\dim M$ é ímpar. Para uma exposição desta questão, v. Kazdan [Ka].

2.7 Corolário da Proposição 2.2. *Se q é o ponto mínimo de p ao longo de γ, então p é o ponto mínimo de q ao longo de $-\gamma$; em particular, $q \in C_m(p)$ se e só se $p \in C_m(q)$.*

Demonstração: Se q é o ponto mínimo de p ao longo de uma geodésica γ, então, pela Proposição 2.2, ou q é conjugado a p, ou

existe uma geodésica $\sigma \neq \gamma$, ligando p a q, tal que $\ell(\sigma) = \ell(\gamma) = d(p,q)$. Em ambos os casos, o ponto mínimo de q ao longo de $-\gamma$ não ocorre depois de p. Como $\ell(-\gamma) = d(p,q)$, concluimos que p é o ponto mínimo de q ao longo de $-\gamma$. □

2.8 Corolário da Proposição 2.2. *Se $q \in M - C_m(p)$, existe uma única geodésica minimizante ligando p a q.*

O Corolário 2.8 mostra que $\exp_p$ é injetiva em uma bola aberta $B_r(p)$ centrada em p se e somente se o raio r é menor ou igual a distância de p a $C_m(p)$. Por esta razão, é usual chamar

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, C_m(p))$$

o *raio de injetividade de M.*

O Corolário 2.8 mostra também que $M - C_m(p)$ é homeomorfo a uma bola aberta do espaço euclidiano. Em um certo sentido, isto indica que a topologia de M está contida no seu cut locus.

A proposição abaixo mostra que a distância de um ponto $p \in M$ ao seu ponto mínimo ao longo de γ depende continuamente da direção inicial de γ. Em verdade, a proposição é um pouco mais geral. Seja T_1M o fibrado tangente unitário de M e defina uma função $f\colon T_1M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por:

$$f(\gamma(0), \gamma'(0)) = \begin{cases} t_0\,, & \text{se } \gamma(t_0) \text{ é o ponto mínimo de } \gamma(0) \\ & \text{ao longo de } \gamma, \\ \infty, & \text{se o ponto mínimo ao longo de } \gamma \\ & \text{não existe.} \end{cases}$$

Introduza em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a topologia cuja base de abertos é dada juntando os intervalos abertos $(a,b) \subset \mathbb{R}$ com os conjuntos da forma $(a,\infty] = (a,\infty) \cup \{\infty\}$. Observe que o conjunto $[a,\infty]$ é compacto nesta topologia, e que uma seqüência $\{t_n\} \to \infty$ nesta topologia quando $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ no sentido usual.

2.9 Proposição. *A função f, acima definida, é contínua.*

Demonstração: Consideremos seqüências $\gamma_i(0) \to \gamma(0)$ e $\gamma_i'(0) \to \gamma'(0)$, e sejam $\gamma_i(t_0^i)$ e $\gamma(t_0)$ os pontos mínimos de $\gamma_i(0)$ e $\gamma(0)$ ao longo de γ_i e γ, respectivamente, onde $t_0^i, t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Queremos provar que $\lim t_0^i = t_0$.

Primeiro provaremos que $\limsup t_0^i \leq t_0$. Se $t_0 = \infty$, não há o que provar. Seja então $t_0 < \infty$ seja $\varepsilon > 0$. Observe que não existem infinitos índices j tais que $t_0 + \varepsilon < t_0^j$. Caso contrário,

$$d(\gamma_j(0), \gamma_j(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon$$

e, por continuidade de d, $d(\gamma(0), \gamma(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon$, o que contradiz o fato de ser $\gamma(t_0)$ o ponto mínimo de $\gamma(0)$ ao longo de γ. Portanto $\limsup t_0^i \leq t_0 + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, o que prova a afirmação feita.

Seja agora $\bar{t} = \liminf t_0^i$. Como

$$\bar{t} = \liminf t_o^i \leq \limsup t_0^i \leq t_0\,,$$

bastará mostrar que $\bar{t} \geq t_0$ para concluir a prova.

Para isto suponha $\bar{t} < \infty$ (se $\bar{t} = \infty$ não há o que provar), e considere uma subseqüência da seqüência t_0^j, ainda indicada por t_0^j, que converge para $\bar{t}$. Como um ponto de acumulação de pontos conjugados é um ponto conjugado, se para toda tal subseqüência, os pontos $\gamma_j(t_0^j)$ são conjugados de $\gamma_j(0)$ ao longo de γ_j, então $\gamma(\bar{t})$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ, donde $\bar{t} \geq t_0$, e teríamos concluído a demonstração.

Suponhamos, portanto, que existe uma subseqüência $t_0^j \to \bar{t}$ na qual, para todo j, $\gamma_j(t_0^j)$ não é conjugado a $\gamma_j(0)$ ao longo de γ_j. Pela Proposição 2.2, existem geodésicas $\sigma_j \neq \gamma_j$ com

$$\sigma_j(0) = \gamma_j(0), \quad \sigma_j(t_0^j) = \gamma_j(t_0^j), \quad \ell(\sigma_j) = \ell(\gamma_j).$$

Tomando, se necessário, uma subseqüência, podemos supor que $\sigma_j \to \sigma$, onde σ é uma geodésica ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(\bar{t})$. Se $\sigma \neq \gamma$, pela Proposição 2.2, teríamos $t_0 \leq \bar{t}$, como queríamos. Se $\sigma = \gamma$, então, por um argumento semelhante ao da Proposição 2.2, mostraríamos que $\gamma(\bar{t})$ é conjugado a $\gamma(0)$, donde $\bar{t} \geq t_0$. □

2.10 Corolário. *Para todo $p \in M$, $C_m(p)$ é fechado; em particular, se M é compacta, $C_m(p)$ é compacto.*

Demonstração: É imediato verificar que

$$C_m(p) = \{\gamma(t);\ t = f(p, \gamma'(0))\}$$

onde $\gamma\colon [0, \infty) \to M$ é uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$ e f é a função da Proposição 2.9. Logo, se q é um ponto de acumulação de $C_m(p)$, existe uma seqüência $\gamma_j(t_j)$, com $t_j = f(p, \gamma_j'(0))$, tal que $\lim \gamma_j(t_j) = q$. Passando a uma subseqüência, se necessário, a seqüência $\gamma_j'(0)$ converge para um vetor unitário v. Seja γ a geodésica com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Então, como f é contínua,

$$\begin{aligned} q &= \lim \gamma_j(t_j) = \lim \gamma_j(f(p, \gamma_j'(0))) \\ &= \lim \exp_p(f(p, \gamma_j'(0))\gamma_j'(0)) = \exp_p(f(p, \gamma'(0))\gamma'(0)) \\ &= \gamma(f(p, \gamma'(0))) \in C_m(p), \end{aligned}$$

o que mostra que $C_m(p)$ é fechado. □

2.11 Corolário. *Suponha que M é completa e que existe $p \in M$ o qual possui ponto mínimo para toda geodésica partindo de p. Então M é compacta.*

Demonstração: Observe que

$$M = \{\gamma(t);\ t \leq f(p, \gamma'(0))\}$$

para toda geodésica γ de M com $\gamma(0) = p$. A hipótese do corolário e a continuidade de f implicam que f é limitada. Portanto M é limitada e o resultado segue do Teorema de Hopf-Rinow. □

2.12 Proposição. *Seja $p \in M$. Suponha que exista um ponto $q \in C_m(p)$ que realiza a distância de p a $C_m(p)$. Então:*

a) *ou existe uma geodésica minimizante γ de p a q ao longo da qual q é conjugado a p,*

b) *ou existem exatamente duas geodésicas minimizantes* γ *e* σ *de* p *a* q*; além disto,* $\gamma'(\ell) = -\sigma'(\ell)$, $\ell = d(p,q)$.

Demonstração: Seja γ uma geodésica minimizante ligando p a q. Pela Proposição 2.2, ou q é conjugado a p, ao longo de γ, e (a) se verifica, ou existe outra geodésica minimizante $\sigma \neq \gamma$, ligando p a q com $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$. Suponhamos então que q não é conjugado a p ao longo de γ e σ, que $\gamma'(\ell) \neq -\sigma'(\ell)$, e vamos obter uma contradição. Em particular, isto mostrará que, nesta situação, só podem existir duas tais geodésicas.

Como $\gamma'(\ell) \neq -\sigma'(\ell)$, existe $V \in T_q(M)$ tal que

$$\langle V, \gamma'(\ell)\rangle < 0, \quad \langle V, \sigma'(\ell)\rangle < 0.$$

Seja $r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva com $r(0) = q$, $r'(0) = V$. Como q não é conjugado a p ao longo de γ, existe uma vizinhança $U \subset T_pM$ de $\ell\gamma'(0)$ onde $\exp_p$ é um difeomorfismo. Seja $v\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ uma curva tal que $\exp_p v(s) = r(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e seja $\gamma_s(t) = \exp_p \frac{t}{\ell} v(s)$, $t \in [0, \ell]$, uma variação de γ (v. Fig. 5). Pela fórmula da primeira variação,

$$\frac{d}{ds}\,\ell(\gamma_s)\bigg|_{s=0} = \langle V, \gamma'(\ell)\rangle < 0.$$

Como q não é conjugado a p ao longo de σ, obteremos de maneira análoga uma variação $\sigma_s(t)$ de σ tal que:

$$\frac{d}{ds}\,(\ell(\sigma_s))\bigg|_{s=0} = \langle V, \sigma'(\ell)\rangle < 0,$$
$$\sigma_s(\ell) = r(s).$$

Portanto, se $s > 0$ é suficientemente pequeno, $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma)$ e $\ell(\sigma_s) < \ell(\sigma)$.

Se $\ell(\gamma_s) = \ell(\sigma_s)$, pela Proposição 2.2, $r(s) = \gamma_s(\ell)$ é ponto mínimo de p. Como

$$d(p, \gamma_s(\ell)) = \ell(\gamma_s) < d(p, C_m(p)),$$

isto contradiz o fato de q realizar a distância de p a $C_m(p)$. Se $\ell(\gamma_s) < \ell(\sigma_s)$, σ_s não é minimizante, donde existe um ponto mínimo $\sigma_s(\tilde{t})$, $\tilde{t} < \ell$, de p ao longo de σ_s. Mas isto contradiz de novo o fato de q realizar a distância de p a $C_m(p)$. O caso $\ell(\gamma_s) > \ell(\sigma_s)$ é análogo. □

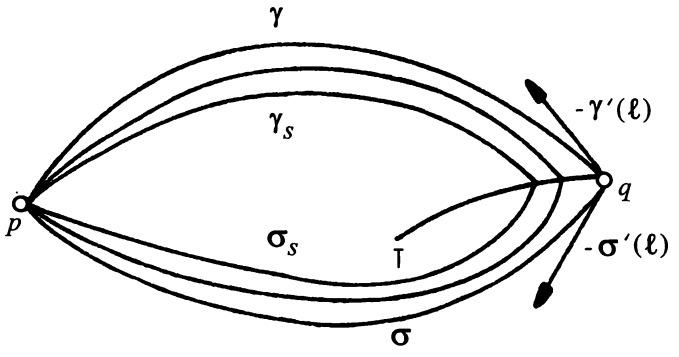


Figura 5

A proposição abaixo mostra, se M é compacta e tem curvatura seccional positiva, que a determinação de uma cota inferior para a distância de um ponto ao seu cut locus depende da determinação de uma cota inferior para os comprimentos das geodésicas fechadas de M.

2.13 Proposição. *Se a curvatura seccional K de uma variedade Riemanniana completa M satisfaz*

$$0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max},$$

então:

a) $i(M) \geq \pi/\sqrt{K_{\max}}$, *ou*

b) *existe uma geodésica fechada γ em M, cujo comprimento é menor do que o de qualquer outra geodésica fechada em M, tal que*

$$i(M) = \frac{1}{2}\,\ell(\gamma).$$

Demonstração: Pelo Teorema de Bonnet-Myers (Teor. 3.1 do Cap. IX), M é compacta. Como T_1M é compacto, segue-se da Proposição 2.9 que existe $p \in M$ tal que $d(p, C_m(p)) = \inf_{r\in M} d(r, C_m(r))$. Como $C_m(p)$ é compacto, existe $q \in C_m(p)$ tal que q realiza a distância de p a $C_m(p)$.

Se q é conjugado a p, $d(p,q) \geq \pi/\sqrt{K_{\max}}$ pela Proposição 2.4 do Capítulo X. Se q não é conjugado a p, existem, pela Proposição 2.12, duas geodésicas minimizantes μ e σ de p a q, com $\mu'(\ell) = \sigma'(\ell)$, $\ell = d(p,q)$. Como $q \in C_m(p)$, temos que $p \in C_m(q)$ e, pela sua própria definição, p realiza a distância de q a $C_m(q)$. Decorre daí que $\mu'(0) = -\sigma'(0)$, donde μ e σ formam uma geodésica fechada γ que, evidentemente, satisfaz (b). □

3 A estimativa do raio de injetividade

A proposição abaixo é uma peça crucial do teorema da esfera, e sua demonstração usa elementos da Teoria de Morse. O leitor que desejar se restringir ao teorema da esfera em dimensão par poderá omitir sua demonstração e passar diretamente para a Proposição 3.4.

3.1 Proposição (Klingenberg [Kℓ 2]). *Seja M^n, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, tal que $1/4 < K \leq 1$. Então, $i(M) \geq \pi$.*

Precisaremos de alguns lemas.

3.2 Lema. *Sejam M e $\widetilde{M}$ variedades Riemannianas de mesma dimensão e tais que as curvaturas seccionais respectivas K e $\widetilde{K}$ satisfaçam $\sup \widetilde{K} \leq \inf K$. Consideremos uma geodésica $\sigma\colon [0,\ell] \to M$, $\sigma(0) = p$, e fixemos um ponto $\tilde{p} \in \widetilde{M}$. Seja $i\colon T_pM \to T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ uma isometria linear e seja $\tilde{\sigma}\colon [0,\ell] \to \widetilde{M}$ dada*

por

$$\tilde{\sigma}(t) = \exp_{\tilde{p}} t(i\sigma'(0)) \quad t \in [0, \ell].$$

Então índice $\sigma \geq$ *índice* $\tilde{\sigma}$.

Demonstração: Seja $\widetilde{W}$ um campo vetorial diferenciável por partes ao longo de $\tilde{\sigma}$. Definamos, como usualmente (Cf. Cap. X), um campo W ao longo de σ por

$$W(t) = \phi^{-1}(\widetilde{W})(t) = P_t \circ i^{-1} \circ \widetilde{P}_t^{-1}(\widetilde{W}(t)),$$

onde, por exemplo, P_t é o transporte paralelo ao longo de σ de 0 a t. É imediato que (Cf. Eq. (4) do Cap. X)

$$\langle W, \sigma' \rangle = \langle \widetilde{W}, \tilde{\sigma}' \rangle, \quad |W(t)| = |\widetilde{W}(t)|, \quad \langle W', W' \rangle = \langle \widetilde{W}', \widetilde{W}' \rangle.$$

Como $\sup \widetilde{K} \leq \inf K$, concluímos que $I(W, W) \leq I(\widetilde{W}, \widetilde{W})$. Portanto se $I(\widetilde{W}, \widetilde{W}) < 0$, temos que $I(W, W) < 0$, o que demonstra o lema. □

Para o próximo lema precisamos dos fatos seguintes. Seja $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade diferenciável M. Um ponto $p \in M$ é um *ponto crítico* de f se $df(p) = 0$; $f(p)$ é então chamado um *valor crítico* de f. Se p é um ponto crítico e $(x_1, \ldots, x_n)$ é um sistema de coordenadas de M em torno de p, o *hessiano* de f, definido pela matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(p)$, representa uma forma bilinear simétrica em T_pM que não depende do sistema de coordenadas escolhido. Diz-se que o ponto crítico é *não-degenerado* se o determinante desta matriz é diferente de zero. Um tal ponto crítico é isolado, e é possível escolher o sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n-\lambda}, y_1, \ldots, y_\lambda)$ de modo que, na vizinhança coordenada considerada, f se escreve

$$f(x_1, \ldots, y_\lambda) = f(p) + x_1^2 + \cdots + x_{n-\lambda}^2 - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2.$$

O número inteiro λ é o *índice* do ponto crítico não-degenerado p. (Para mairoes detalhes v. Milnor [Mi].)

3.3 Lema. *Seja* M^n *uma variedade diferenciável e seja* $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável cujos pontos críticos são todos não-degenerados. Dados* $p, q \in M$ *e uma curva diferenciável* $\gamma\colon [0,1] \to$

M com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, indiquemos por $a = \max\{f(p), f(q)\}$, por

$$M^a = \{x \in M; f(x) \leq a\},$$

e por $b = \max_{t\in[0,1]}(f \circ \gamma(t))$. Admita que $f^{-1}([a,b])$ é compacto e não contém pontos críticos de índice zero ou um. Então, para todo $\delta > 0$, γ é homotópica, mantendo as extremidades fixas, a uma curva $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset M^{a+\delta}$.

Demonstração: Escolha uma métrica Riemanniana em M. Usaremos ao longo da prova o fato seguinte (cf. Milnor [Mi], pg. 12). Se $f^{-1}([a_1, a_2])$ é compacto e não contém pontos críticos de f, usando o campo grad f (que se anula exatamente nos pontos críticos de f), obteremos uma aplicação $h\colon M^{a_2} \to M^{a_1}$, que é uma *retração por deformação*, isto é, $h|M^{a_1} =$ ident., e existe uma homotopia $h_s\colon M^{a_2} \to M^{a_2}$, $s \in [0,1]$, tal que $h_0 =$ ident. e $h_1 = h$.

Seja b como no enunciado. Podemos supor $b > a$; caso contrário, não há o que provar. Sejam $p_1, \ldots, p_k$ os pontos críticos de f em $M^b - M^a$, com valores $f(p_i) = c_i$, $i = 1, \ldots, k$. Como os pontos críticos são isolados, podemos perturbar f em $M^b - M^a$ de modo que todos os c_i's sejam distintos. Suponhamos portanto que $b \geq c_1 > c_2 > \cdots > c_k > a$.

Se b não é um valor crítico de f, $f^{-1}([c_1 + \varepsilon, b])$ não contém pontos críticos de f para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Pela observação acima, existe uma retração por deformação $h_1\colon M^b \to M^{c_1+\varepsilon}$ e a curva $\gamma_1 = h_1 \circ \gamma$ está em $M^{c_1+\varepsilon}$. Se $b = c_1$ é valor crítico de f, procederemos do seguinte modo.

Por hipótese, p_1 tem índice $\lambda \geq 2$. Seja H uma vizinhança de p_1 onde f pode ser escrita na forma

$$f = c_1 + x_1^2 + \cdots + x_{n-\lambda}^2 - y_1^2 - \cdots - y_\lambda^2.$$

Suponhamos que H e $\varepsilon > 0$ sejam suficientemente pequenos para que $M^{c_1+\varepsilon} - \left(M^{c_1-\varepsilon} \cup H\right)$ não contenha pontos críticos. Então, usando o campo grad f obtém-se uma retração por deformação $\bar{h}_1\colon M^{c_1+\varepsilon} \to M^{c_1-\varepsilon} \cup H$. Seja $\bar{\gamma}_1 = \bar{h}_1 \circ \gamma \subset M^{c_1-\varepsilon} \cup H$.

Seja agora L o conjunto dos pontos de H tais que $y_1 = y_2 = \cdots = y_\lambda = 0$ (v. Fig. 6). Como

$$\dim \bar{\gamma}_1' + \dim L \leq 1 + n - 2 < \dim M,$$

é possível, por transversalidade, perturbar $\bar{\gamma}_1$ de modo que $\bar{\gamma}_1([0,1]) \cap L = \emptyset$; tal perturbação pode ser feita em H, de modo a deixar fixas as extremidades de $\bar{\gamma}_1$. Como, para os pontos fora de L, as trajetórias de grad f se afastam do ponto crítico p_1, existe uma retração por deformação $h_2 \colon M^{c_1-\varepsilon} \cup (H - L) \to M^{c_1-\varepsilon}$. É claro que $\gamma_2 = h_2 \circ \bar{\gamma}_1 \subset M^{c_1-\varepsilon}$.

Prosseguindo indutivamente, obteremos $\gamma_j \subset M^{c_k-\varepsilon}$. Dado $\delta > 0$, não existem pontos críticos em $M^{c_k-\varepsilon} - M^{a+\delta}$ e podemos obter uma retração por deformação $h_{j+1} \colon M^{c_k-\varepsilon} \to M^{a+\delta}$. É claro que $\tilde{\gamma} \colon h_{j+1} \circ \gamma_j \subset M^{a+\delta}$, como queríamos. □

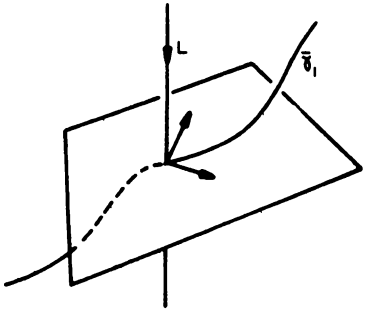


Figura 6

Demonstração da Proposição 3.1: Suponha $i(M) < \pi$. Pela Proposição 2.13, existe uma geodésica fechada γ em M de comprimento $\ell = \ell(\gamma) < 2\pi$.

Pelo Corolário 2.10 do Cap. XI, o conjunto dos pontos conjugados a $\gamma(0)$ ao longo de γ é discreto. Escolha um $\varepsilon > 0$ satisfazendo às seguintes condições ($B_a(q)$ indicará uma bola aberta de centro q e raio a):

1) $\gamma(\ell - \varepsilon)$ não é conjugado a $p = \gamma(0)$ ao longo de γ;

2) $\exp_p$ é um difeomorfismo em $B_{2\varepsilon}(p)$;

3) $3\varepsilon < 2\pi - \pi/\sqrt{\widetilde{K}}$, onde $\widetilde{K} = \inf_M K$;

4) $3\varepsilon < 2\pi - \ell$;

5) $5\varepsilon < 2\pi$.

Pelo Teorema de Sard, existe um valor regular $q \in B_\varepsilon(\gamma(\ell - \varepsilon))$ de $\exp_p$. Por (1), é possível escolher q de modo que $q = \gamma_1(t)$, onde γ_1 é uma geodésica saindo de p com $3\varepsilon < \ell(\gamma_1) < \ell$ (v. Fig. 7).

Seja γ_0 a geodésica minimizante ligando p a q. Então por (2),

$$\ell(\gamma_0) \leq d(p, \gamma(\ell - \varepsilon)) + d(\gamma(\ell - \varepsilon, q) < 2\varepsilon,$$

donde $\gamma_0 \neq \gamma_1$.

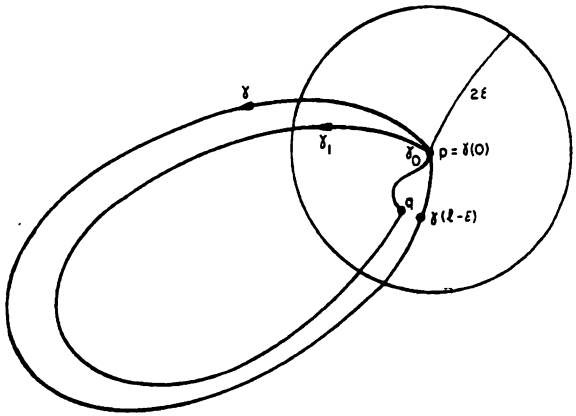


Figura 7

Considere o espaço $\Omega^c_{p,q}$ da Observação 2.12 do Capítulo XI e sua aproximação de dimensão finita B. Como q é um valor regular de $\exp_p$, todos os pontos críticos de $\Omega^c_{p,q}$ são não-degenerados. Pelo fato de ser M simplesmente conexo, existe uma homotopia γ_s entre γ_0 e γ_1, mantendo fixos os pontos p e q. Como B é um retrato de deformação de $\Omega^c_{p,q}$, a homotopia γ_s (que é uma curva em $\Omega^c_{p,q}$) é deformada em uma curva em B. Pelo Lema 3.3, para todo $\delta > 0$, γ_s pode ser deformada em uma homotopia $\tilde{\gamma}_s$ de γ_0 a γ_1 de tal modo que a curva de maior

comprimento $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\gamma}_s$ satisfaça a seguinte condição: $\ell(\tilde{\gamma}) < a+\delta$, onde $a = \max\{\ell(\gamma_0), \ell(\gamma_1), \ell(\sigma)\}$ e σ é a geodésica de maior comprimento com índice $\sigma < 2$ em $\Omega^c_{p,q}$.

Faça $\delta = \varepsilon$. Já vimos que $\ell(\gamma_0) < 2\varepsilon$ e que $\ell(\gamma_1) < \ell < 2\pi - 3\varepsilon$, por (4). Para estimar $\ell(\sigma)$, aplique o Lema 3.2 para o caso em que $\widetilde{M}$ é uma esfera com curvatura $\widetilde{K} = \inf_M K > 1/4$ obtendo

$$\text{índice } \tilde{\sigma} \leq \text{ índice } \sigma < 2.$$

Como $\tilde{\sigma}$ é uma geodésica em S^n, $n \geq 3$, segue-se do teorema do índice de Morse que se $\ell(\sigma) > \pi/\sqrt{\widetilde{K}}$ então índice $\tilde{\sigma} \geq 2$. Portanto, por (3), $\ell(\sigma) \leq \pi/\sqrt{\widetilde{K}} < 2\pi - 2\varepsilon$. Segue-se daí por (5), que

$$\ell(\tilde{\gamma}) < a + \varepsilon < 2\pi - 3\varepsilon + \varepsilon = 2\pi - 2\varepsilon$$

Por outro lado, o Lema de Klingenberg (v. Exercício 1 do Cap. X) afirma que na homotopia $\tilde{\gamma}_s$ existe uma curva $\tilde{\gamma}_{s_0}$ com $\ell(\gamma_0) + \ell(\tilde{\gamma}_{s_0}) \geq 2\pi$. Decorre daí que

$$\ell(\tilde{\gamma}) \geq \ell(\tilde{\gamma}_{s_0}) \geq 2\pi - \ell(\gamma_0) > 2\pi - 2\varepsilon,$$

o que contradiz o fato acima que $\ell(\tilde{\gamma}) < 2\pi - 2\varepsilon$, e mostra que a hipótese $i(M) < \pi$ é insustentável. Isto termina a demonstração da Proposição 3.1. □

Para o caso particular de dimensão par é possível provar uma versão mais forte da Proposição 3.1, e a demonstração não utiliza a Teoria de Morse.

3.4 Proposição. *Se a curvatura seccional K de uma variedade Riemanniana M^n, compacta, orientável e de dimensão par, satisfaz $0 < K \leq 1$, então $i(M) \geq \pi$.*

Demonstração: Por compacidade, existem pontos $p, q \in M$ tais que:

$$q \in C_m(p) \quad \text{e} \quad d(p,q) = i(M).$$

Suponhamos que $d(p,q) < \pi$ e vamos obter uma contradição.

Se p é conjugado a q, decorre da Proposição 2.4 do Cap. X que $d(p,q) \geq \pi$, o que contradiz a hipótese. Portanto p não

é conjugado a q e, pelas Proposições 2.12 e 2.13, existe uma geodésica fechada γ passando por $p = \gamma(0)$ e q, e tal que $\ell(\gamma) < 2\pi$. O transporte paralelo ao longo da curva fechada γ deixa invariante um vetor V ortogonal a γ (cf. Lema 3.8 do Cap. IX). Calculando a segunda variação $E''_V(0)$ para um tal V, vemos que ela é estritamente negativa. Logo existe uma variação por curvas regulares fechadas $\gamma_s(t)$ de γ, $s \in [0, \varepsilon]$, tal que $\ell(\gamma_s) < \ell(\gamma)$ para todo $s \neq 0$ (o fato de ser par a dimensão de M desempenha aqui um papel crucial).

Seja q_s um ponto de γ_s a uma distância máxima de $\gamma_s(0)$ (v. Fig. 8). Como $d(\gamma_s(0), q_s) < d(p, q)$, existe uma única geodésica minimizante σ_s ligando $q_s = \sigma_s(0)$ a $\gamma_s(0)$. Como q é o único ponto de γ que está à distância máxima de p, $\lim_{s\to 0} \sigma_s(0) = q$. Além disto, por compacidade local do fibrado tangente, existe em $T_q(M)$ um ponto de acumulação w dos vetores $\sigma'_s(0)$. Por continuidade, a geodésica $\sigma(t) = \exp_p tw$, é uma geodésica minimizante ligando q a p. Por outro lado, seja $\sigma_{s,t}$ a geodésica minimizante ligando $\gamma_s(0)$ a um ponto $\gamma_s(t)$, próximo de q_s. Então $\sigma_{s,t}$ é uma variação de $-\sigma_s$ e, aplicando a fórmula da primeira variação, conclui-se que $\sigma'_s(0)$ é ortogonal a γ'_s em q_s, para todo $s \in [0, \varepsilon]$; portanto $\sigma'(0)$ é ortogonal a γ' em q. Decorre daí que existem três geodésicas minimizantes ligando p a q. Como p não é conjugado a q, isto contradiz a Proposição 2.12. □

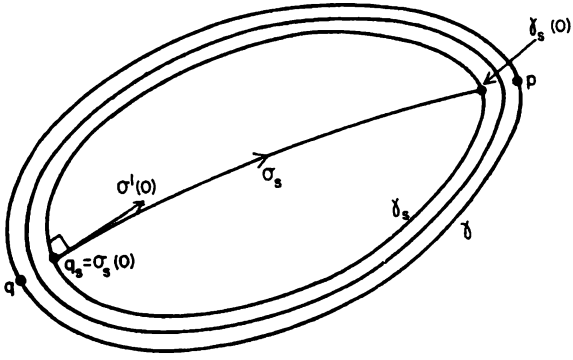


Figura 8

3.5 Observação. Pelo teorema de Synge (v. Cap. IX, Cor. 3.10), as variedades que satisfazem as hipóteses da Proposição 3.4 são simplesmente conexas. Por outro lado, uma variedade simplesmente conexa é orientável; caso contrário, ela possuiria um recobrimento com duas folhas (v. Exercício 12 do Cap. 0), o que contradiz o fato de ela ser simplesmente conexa. Portanto, a hipótese de orientabilidade na Proposição 3.4 é equivalente à hipótese de ser M simplesmente conexa.

4 O teorema da esfera

No que se segue, o fato da dimensão de M ser par ou ímpar não desempenhará papel algum. Precisamos de mais alguns lemas.

4.1 Lema (Berger [Br 1]). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, e sejam $p, q \in M$ tais que $d(p,q) = \operatorname{diam} M$. Então, para todo $W \in T_pM$, existe uma geodésica minimizante γ de $p = \gamma(0)$ a q com $\langle \gamma'(0), W \rangle \geq 0$.*

Demonstração: Seja $\lambda(t) = \exp_p tW$ e seja $\gamma_t \colon [0, \ell(\gamma_t)] \to M$ uma geodésica minimizante tal que $\gamma_t(0) = \lambda(t)$, $\gamma_t(\ell(\gamma_t)) = q$. Suponhamos, primeiro, que para todo inteiro n exista t_n, $0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}$, tal que $\langle \gamma'_{t_n}(0), \lambda'(t_n) \rangle \geq 0$. Passando a uma subseqüência, se necessário, a seqüência γ_{t_n} converge para uma geodésica minimizante γ que satisfaz

$$0 \leq \langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = \langle \gamma'(0), W \rangle,$$

e a demonstração estaria terminada.

Suponhamos agora que exista n tal que para todo t, $0 \leq t \leq 1/n$, se tenha $\langle \gamma'_t(0), \lambda'(t) \rangle < 0$, e vamos mostrar que isto leva a uma contradição.

Considere uma vizinhança totalmente normal U de $\lambda(t)$, e seja $q_0 \in U$ um ponto de γ_t. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ e σ_s a geodésica minimizante ligando q_0 a $\lambda(s)$

(v. Fig. 9). Usando a fórmula da primeira variação da energia, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E(\sigma_s)\Big|_{s=t} = -\langle \gamma_t'(0), \lambda'(t)\rangle > 0.$$

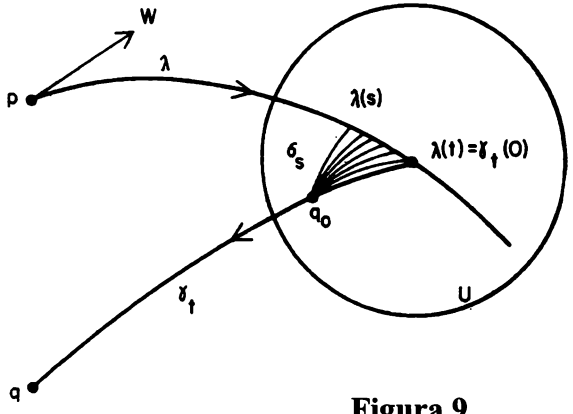


Figura 9

Portanto, para $s < t$, tem-se $d(q_0, \lambda(s)) < d(q_0, \lambda(t))$, donde

$$d(q, \lambda(s)) \leq d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(s)) < d(q, q_0) + d(q_0, \lambda(t)) = d(q, \lambda(t)).$$

Por outro lado, como p está a uma distância máxima de q, $d(q, \lambda(t)) \leq d(q, \lambda(0))$, o que fornece a contradição procurada. □

O lema seguinte foi originalmente provado por Berger [Br 1] utilizando o teorema de Toponogov. A prova que apresentamos aqui é devida a Tsukamoto e utiliza o Teorema de Rauch.

4.2 Lema. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa cuja curvatura seccional K satisfaz*

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1,$$

e sejam $p, q \in M$ tais que $d(p,q) = \dim(M)$. Então

$$M = B_\rho(p) \cup B_\rho(q),$$

onde $B_r(p) \subset M$ indica a bola geodésica aberta de raio r e centro $p \in M$ e ρ é tal que $\pi/2\sqrt{\delta} < \rho < \pi$.

Demonstração: (Tsukamoto [Ts]). Pela estimativa do raio de injetividade da Seção 3, $B_\rho(p)$ não contém pontos do cut locus de p. Logo $B_\rho(p)$ é difeomorfa, pela aplicação exponencial, a uma bola euclidiana, e o mesmo se passa com $B_\rho(q)$. É neste ponto que a estimativa $i(M) \geq \pi$ entra, da maneira crucial, no Teorema da Esfera.

Suponhamos que existe $r \in M$ tal que $d(p,r) \geq \rho$, $d(q,r) \geq \rho$, e vamos obter uma contradição. Podemos supor que $d(p,r) \geq d(q,r) \geq \rho$.

Uma geodésica minimizante de q a r intersecta $\partial(B_\rho(q))$ em um ponto $q' \notin B_\rho(p)$; caso contrário,

$$d(r,q') > d(r, B_\rho(p)) \geq d(r, B_\rho(q)) = d(r,q'),$$

o que é um absurdo. Por outro lado, pelo Teorema de Bonnet-Myers, $\operatorname{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{\delta} < 2\rho$. Portanto, se q'' é um ponto de intersecção de uma geodésica minimizante de q a p com $\partial B_\rho(q)$, então $q'' \in B_\rho(p)$, pois,

$$d(p,q'') = d(p,q) - d(q,q'') < 2\rho - \rho = \rho.$$

Como $\partial B_\rho(q)$ é conexo por caminhos (pois $B_\rho(q)$ é homeomorfa a uma bola euclidiana), decorre que $\partial B_\rho(p) \cap \partial B_\rho(q) \neq \emptyset$, donde existe $r_0 \in M$ tal que $d(r_0,p) = d(r_0,q) = \rho$. A contradição que procuramos será obtida a partir da existência de um tal r_0.

Consideremos uma geodésica minimizante λ ligando p a r_0. Pelo lema de Berger, existe uma geodésica minimizante γ de p a q com $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle \geq 0$ (Fig. 10). Seja s um ponto de γ tal que $d(p,s) = \rho$. Apliquemos o Teorema de Rauch a esta situação (v. Proposição 2.5 do Cap. X), comparando M^n com uma esfera S^n de curvatura constante δ. Como o ângulo $\sphericalangle r_0ps \leq \pi/2$ e $d(r_0,s)$ é menor ou igual ao comprimento de qualquer curva em M ligando r_0 a s, concluimos que

$$d(r_0,s) \leq \pi/2\sqrt{\delta}.$$

Como $d(r_0, p) = d(r_0, q) = \rho$, e existe um ponto s de γ com $d(r_0, s) < \rho$, a distância de r_0 a γ é realizada por um ponto s_0 no interior de γ. A geodésica minimizante de r_0 a s_0 é ortogonal a γ, e

$$d(r_0, \gamma) = d(r_0, s_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta}.$$

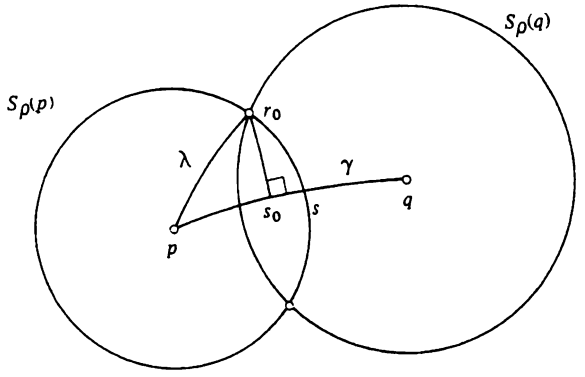


Figura 10

Como $d(p, q) \leq \pi/\sqrt{\delta}$, temos que ou $d(p, s_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$ ou $d(q, s_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$. Em qualquer dos dois casos, obteremos a contradição procurada. Consideremos o caso $d(p, s_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$, o outro sendo análogo. Neste caso, como $d(r_0, s_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta}$ e o ângulo $\sphericalangle ps_0r_0 = \pi/2$, teremos, pelo teorema de comparação de Rauch acima citado, $d(p, r_0) \leq \pi/2\sqrt{\delta} < \rho$, o que contradiz o fato de ser $d(p, r_0) = \rho$, e conclui a demonstração. □

É possível mostrar que uma variedade topológica compacta coberta por duas bolas, como no Lema 4.2, é homeomorfa à uma esfera, o que concluiria a demonstração do teorema da esfera. No caso presente, é possível construir explicitamente este homeomorfismo, o que faremos a seguir. O lema abaixo descreve o que, no homeomorfismo procurado, corresponde ao "equador" de M.

4.3 Lema. *Nas condições do Lema* 4.2, *em cada geodésica de comprimento* ρ *partindo de* p *existe um único ponto* m *tal que*

$$d(p, m) = d(q, m) < \rho.$$

Analogamente, em cada geodésica partindo de q de comprimento ρ existe um único ponto n equidistante de p e q.

Demonstração: Seja $\gamma(s)$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e considere a diferença

$$d(q, \gamma(s)) - d(p, \gamma(s)) = f(s).$$

A função f é evidentemente contínua e $f(0) = d(q,p) > 0$. Seja s_0 tal que $\gamma(s_0)$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ. Então pela estimativa de Klingenberg (Prop. 3.1, ou Prop. 3.4 para o caso de dimensão par), $d(p, \gamma(s_0)) \geq \pi > \rho$. Pelo Lema 4.2, $d(q, \gamma(s_0)) < \rho$. Logo,

$$f(s_0) = d(q, \gamma(s_0)) - d(p, \gamma(s_0)) < 0.$$

Decorre daí que f se anula para algum $s_1 \in (0, s_0)$; isto é, existe $m = \gamma(s_1)$ satisfazendo o pedido.

Para provar a unicidade, suponha que existem $m_1 \neq m_2$, ambos equidistantes de p e q. Podemos supor que m_1 está entre p e m_2 (Fig. 11). Então

$$\begin{aligned} d(q, m_2) &= d(p, m_2) = d(p, m_1) + d(m_1, m_2) \\ &= d(q, m_1) + d(m_1, m_2). \end{aligned}$$

Sejam σ_1 a (única) geodésica minimizante ligando q a m_1. Pela igualdade acima, σ_1 coincide com γ, donde q pertence a γ. Como $d(p, m_1) = d(q, m_1)$, $d(p, m_2) = d(q, m_2)$ e $m_1 \neq m_2$, concluimos que $p = q$, o que contradiz a hipótese. A situação para o ponto q é inteiramente análoga. □

4.4 Observação. Note que, devido à sua unicidade, o ponto m depende continuamente da (direção inicial da) geodésica que o contém.

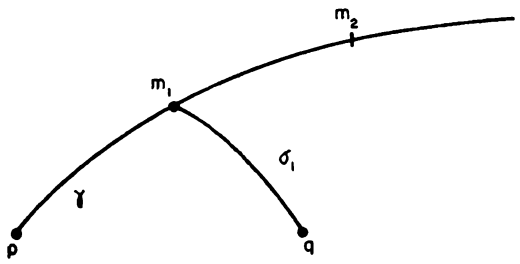


Figura 11

Podemos agora construir explicitamente o homeomorfismo mencionado no teorema da esfera.

Demonstração do Teorema 1.1: Sejam $p, q \in M$ tais que $\operatorname{diam} M = d(p,q)$. Sejam D_1 e D_2 os subconjuntos de M formados pelos segmentos de geodésicas $\overline{pm}$ e $\overline{qn}$, respectivamente, onde os pontos m e n são dados pelo Lema 4.3. Pela continuidade de m (v. Obs. 4.4), D_1 e D_2 são subconjuntos fechados de M. Afirmamos que $D_1 \cup D_2 = M$ e $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$.

Para ver isto, seja $r \in M$. Pelo Lema 4.2, ou $d(p,r) < \rho$ ou $d(q,r) < \rho$. Consideremos o primeiro caso, o segundo sendo análogo. Como $d(p, C_m(p) \geq \pi > \rho$, existe uma única geodésica minimizante γ passando por p e r. Pelo Lema 4.3, existe um único ponto m em γ com $d(p,m) = d(q,m) < \rho$. Se $d(p,r) < d(q,r)$, então $r \in \overline{pm}$, isto é, $r \in D_1$. Se $d(p,r) = d(q,r)$, por unicidade, $r = m$, isto é, $r \in \partial D_1$. Se $d(p,r) > d(q,r)$, então $d(q,r) < \rho$ e, usando o argumento anterior com q no lugar de p, teríamos que $r \in \overline{qn}$ e portanto $r \in D_2$. Portanto $r \in D_1 \cup D_2$. Se $r \in D_1 \cap D_2$, segue-se do argumento anterior que $d(p,r) = d(q,r)$, donde $r = m = n$, o que prova a afirmação feita.

Podemos agora definir uma aplicação $\varphi\colon S^n \to M^n$ do seguinte modo. A um ponto fixado $N \in S^n$ associamos p, e ao seu ponto antípoda $S \in S^n$ associamos q. Escolha uma isometria linear $i\colon T_N S^n \to T_p M$. Para cada ponto e do equador E de S^n relativamente ao pólo norte N, considere a geodésica $\gamma(s)$ de S^n, $0 \leq s \leq \pi$, dada por $\gamma(0) = N$, $\gamma(\pi/2) = e$. Seja m o ponto

dado pelo Lema 4.3 na geodésica de M que passa por p com o vetor velocidade $i\gamma'(0)$. Defina:

$$\begin{cases} \varphi(\gamma(s)) = \exp_p \left(s\frac{2}{\pi} d(p,m)(i \circ \gamma'(0))\right), & 0 < s \leq \frac{\pi}{2}, \\ \varphi(\gamma(s)) = \exp_q \left(\left(2 - \frac{2s}{\pi}\right) d(q,m)V\right), & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi, \end{cases}$$

onde V é o vetor tangente unitário em q da única geodésica minimizante de q a m.

É imediato verificar que φ aplica o hemisfério norte fechado biunivocamente sobre D_1, o hemisfério sul fechado biunivocamente sobre D_2 e o equador E em $\partial D_1 = \partial D_2 = D_1 \cap D_2$. Pela unicidade dos pontos m e n dados no Lema 4.3, φ é contínua. Como $M = D_1 \cup D_2$, φ é sobrejetiva. Finalmente, como $D_1 \cap D_2 = \partial D_1 = \partial D_2 = \varphi(E)$, φ é injetiva. Como S^n é compacto, φ é um homeomorfismo. □

5 Alguns desenvolvimentos posteriores

O teorema da esfera deu origem a um grande número de questões. Isto provocou uma intensa atividade de pesquisa que se estende até os nossos dias e se constitue em um dos ramos mais vigorosos da Geometria Diferencial.

A primeira questão natural é se é possível substituir "homeomorfa" por "difeomorfa" no enunciado do teorema da esfera. Observe que o homeomorfismo do teorema da esfera (v. Seção 4) é obtido "colando" dois discos pelos seus bordos. Uma tal construção é compatível com qualquer estrutura diferenciável em M distinta da estrutura usual da esfera. Portanto, a prova do teorema da esfera aqui apresentada não é suficiente para fornecer um difeomorfismo.

Em 1966, D. Gromoll [Gℓ] e E. Calabi (não publicado) provaram que, para um "pinching" h_n suficientemente pequeno (h_n depende da dimensão n de M), o teorema da esfera é válido

subsituindo "homeomorfa" por "difeomorfa". O "pinching" h_n foi melhorado em vários trabalhos posteriores (por exemplo, [Sh] e [SSK]) mas ainda não se conhece o seu valor ótimo; a melhor estimativa no momento é $\lim h_n \sim 0,68$ quando $n \to \infty$ [IHR].

Uma outra pergunta natural é o que se passa, no caso de dimensão par, para $h < 1/4$.

Um ponto de vista possível neste problema é, seguindo uma idéia de Rauch [R 2], comparar a curvatura da variedade M com a curvatura de um dos espaços simétricos (compactos, simplesmente conexos, de posto um) e tentar mostrar que se as curvaturas estão "próximas", em um certo sentido, as topologias são "semelhantes". Depois de resultados preliminares de do Carmo [dC 1], Klingenberg [Kl 3], Kobayashi [Ko] e Cheeger [Cr 1], um resultado satisfatório foi obtido por Min-Oo e Ruh em [MR].

Um outro ponto de vista é tentar mostrar que se $h = (1/4) - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, uma variedade Riemanniana simplesmente conexa compacta e h-pinched é ainda homeomorfa a uma esfera ou a um dos espaços simétricos mencionados anteriormente. Isto foi obtido recentemente por Berger [Br 3] mas ainda não se conhece estimativa alguma para o valor de ε.

No caso de dimensão ímpar, também se põe a questão de saber o que acontece para $h < 1/4$. Entretanto, o problema neste caso parece bem mais difícil. Uma das dificuldades é que a estimativa $i(M) \geq \pi$ do raio de injetividade (v. Prop. 3.1), não pode ser válida em dimensão ímpar sem alguma restrição sobre h. Por um exemplo de Beger (v. Cheeger-Ebin [CE] pp. 70-71 para detalhes), o melhor que se pode esperar é que a estimativa seja válida para $h = 1/9$, mas mesmo isto ainda não está demonstrado.

Em 1977, Grove e Shiohama [GS] provaram um teorema da esfera, no qual a hipótese de "pinching" (1') é substituida por uma hipótese sobre o diâmetro: *Se M é compacta, $K \geq 1$, e* $\operatorname{diam}(M) > \pi/2$ *então M é homeomorfa a uma esfera.* O caso $\operatorname{diam}(M) = \pi/2$ (onde o teorema é falso, como mostra o exemplo do espaço projetivo real) foi essencialmente classificado por Gromoll e Grove [Gℓ-G].

Motivados pelo teorema da esfera, podemos perguntar se uma variedade Riemanniana M^n compacta com curvatura seccional K satisfazendo $-1-\varepsilon \leq K \leq -1$, para algum $\varepsilon > 0$, admite uma métrica Riemanniana de curvatura constante -1. Em 1978, Gromov [Gv 0] mostrou que se o diâmetro de M é limitado superiormente por D, existe um $\varepsilon = \varepsilon(n, D)$, dependendo da dimensão n e da limitação D do diâmetro, que responde afirmativamente a pergunta acima.

Um resultado surpreendente sobre a topologia das variedades compacta, conexas, de curvatura não-negativa foi obtido por Gromov [Gv 2], e afirma que, neste caso, existe uma constante $C(n)$, dependendo apenas da dimensão n da variedade, tal que a soma $\sum b_i$, $1 \leq i \leq n$, dos números de Betti b_i (em um corpo qualquer) é limitada superiormente por $C(n)$. Isto mostra que a soma conexa de um número suficientemente grande de cópias dos produtos $S^n \times S^{n-p}$, $0 < p < n$, (S^k é uma esfera de dimensão k) não admite métrica de curvatura não negativa.

A experiência com os problemas sugeridos pelo teorema da esfera conduziu a uma mudança do ponto de vista inicial, e levou à formulação da seguinte questão: Quantos tipos topológicos distintos podem possuir métricas Riemannianas com restrições dadas? O ponto de vista inicial era caracterizar a topologia de uma variedade por meio da curvatura, ou, se necessário, da curvatura e de outros elementos geométricos simples, tais como o diâmetro e o volume. No ponto de vista acima mencionado, procuramos olhar o conjunto das variedades Riemannianas com certas propriedades a fim de determinar que topologias podem aí aparecer.

Um resultado surpreendente e fundamental nesta direção é devido a Cheeger [Cr 2] (v. também Weinstein [We1] e Peters [Pe]) e afirma que, fixada a dimensão, só existe um número finito de tipos de homotopia no conjunto das variedades Riemannianas compactas com volume limitado inferiormente, diâmetro limitado superiormente e curvatura seccional limitada em valor absoluto. A limitação inferior do volume pode ser substituída por uma limitação inferior do raio de injetividade; todas as

condições são, entretanto, necessárias.

O ponto de vista adotado no teorema anterior revelou-se extremamente fecundo. M. Gromov [Gv 1] demonstrou que o conjunto das variedades Riemannianas (dimensão fixada) que satisfazem as hipóteses do teorema de Cheeger é compacto em uma topologia conveniente. Este resultado tem várias aplicações, entre as quais o $\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)$-teorema de Berger, acima citado. Para maiores detalhes sobre o assunto, recomendamos a exposição de Pansu no Seminário Bourbaki [Pa].

É impossível, em poucas páginas, fazer justiça à importância do teorema da esfera. Por falta de espaço e tempo, deixaremos sem menção vários desenvolvimentos importantes que se relacionam com o teorema da esfera ou foram por ele motivados (o caso completo não-compacto; a utilização de outros tipos de curvatura, tais como a curvatura Ricci ou a curvatura escalar; outras hipóteses de "pinching", etc.). Uma parte deste material é coberto no excelente survey de M. Berger [Br 3], onde o "leitmotiv" é o papel do teorema da esfera no desenvolvimento da Geometria Riemanniana. Uma ampla lista de referências pode ser encontrada no survey de Sakai [Sa]. Finalmente, uma outra demonstração do teorema da esfera, devida a Gromov, seguindo um caminho completamente distinto do aqui apresentado, pode ser encontrada em Eschenburg [E].

O caso diferenciável do Teorema da Esfera, que mencionamos no início desta seção, foi completamente resolvido por Simon Brendel and Richard Schoen (cf. [BrSc1]) utilizando modificações não-triviais das técnicas do fluxo de Ricci. A estratégia da prova é usar o fluxo de Ricci para deformar uma métrica (1/4)-pinched em uma métrica de curvatura constante. O problema é que a condição de (1/4)-pinched não é preservada ao longo da deformação pelo fluxo de Ricci. É necessário, então, obter condições envolvendo a curvatura que sejam implicadas pelo (1/4)-pinching e sejam preservadas pelo fluxo de Ricci.

A descrição deste e de outros resultados se encontra no belo "survey" de Brendel e Schoen [BrSc2], onde se encontram também vários aspectos do Teorema da Esfera e uma excelente lista de

referências. Aqui, mencionaremos apenas o enunciado do Teorema de Brendel e Schoen, para o que rpecisamos de algumas definições:

Uma variedade Riemanniana M é *fracamente δ-pinched no sentido pontual* se

$$0 \leq \delta K(P_1) \leq K(P_2),$$

para todo $p \in M$ e todo par de planos $P_1, P_2 \subset T_pM$, onde $K(P_i)$ é a curvatura seccional de M em P_i. Se valem as desigualdades estritas, dizemos que M é *estritamente δ-pinched no sentido pontual*.

Teorema (S. Brendel and R. Schoen [BrSc1]). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, que é estritamente $(1/4)$-pinched no sentido pontual. Então M é difeomorfa a uma forma espacial esférica.*

REFERÊNCIAS

[Am 1] Ambrose, W., Parallel translation of Riemannian curvature, Ann. of Math. 64 (196), 337-363.

[Am 2] Ambrose, W., The index theorem in Riemannian geometry, Ann. of Math. 73 (1961), 49-86.

[Br 1] Berger, M., Les variétés Riemannienes (1/4)-pincées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14 (1960), 161-170.

[Br 2] Berger, M., Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de 1/4, Ann. Institut Fourier 33 (1983), 135-150.

[Br 3] Berger, M., H.E. Rauch, Géomètre Différentiel, in Differential Geometry and Complex Analysis, Eds. I. Chavel, H.M. Farkas, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[Be] Besse, A., Manifolds all of whose geodesics are closed, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1978.

[Bo] Bonnet, O., Sur quelques proprétés des lignes geodesiques, C.R. Ac. Sc. Paris, 40 (1855), 1311-1313.

[BrSc1] Brendel, S. and Schoen, R., Manifolds with (1/4)-pinched curvature are space forms, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 287–307.

[BrSc2] Brendel, S. and Schoen, R., Curvature sphere theorems and the Ricci flow, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 48 (2011), 1-32.

[By] Byers, W., On a theorem of Preissmann, Proc. Am. Math. Soc. 24 (1970), 50-51.

[dC 1] Carmo, M. do, The cohomology ring of certain kählerian manifolds, Ann. of Math. 81 (1965), 1-14.

[dC 2] Carmo, M. do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[dC 3] Carmo, M. do, O Método do Referencial Móvel, III Escola Latino-Americano de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[dC 4] Carmo, M. do, Formas Diferenciais e Aplicações, 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1971, e Differential Forms and Applications, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

[Ca] Cartan, E., Leçons sur la Geométrie des Espaces de Riemann, (2a. edição) Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[CE] Cheeger, J. e Ebin, D., Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[Cr 1] Cheeger, J., Pinching theorems for a certain class of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 91 (1969), 807-834.

[Cr 2] Cheeger, J., Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.

[Ch 1] Chern, S.S., Differentiable manifolds, mimeographed notes, University of Chicago. Reproduzida nos Textos de Matemática do Recife, 4, 1959.

[Ch 2] Chern, S.S., Minimal Submanifolds of a Riemannian Manifold, Department of Math., Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas, 1968.

[Cf] Christoffel, E.B., Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 46-70.

[Da] Dajczer, M. et al. Submanifolds and Isometric Immersions, Math. Lecture Series 13, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas, 1990.

[E] Eschenburg, J., Local convexity and nonnegative curvature - Gromov's proof of the sphere theorem, Invent. Math. 84 (1986), 507-522.

[G] Gelfand, I.M., Lectures on Linear Algebra, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, New York, 1961.

[Ga] Gauss, K.F., General Investigations of Curved Surfaces, Raven Press, New York, 1965.

[Gb] Greenberg, M., Lectures on Algebraic Topology, W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.

[GKM] Gromoll, D., Klingenberg, W., Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Mathematics, n. 55, Springer, 1968.

[Gn] Green, L.W., Auf Wiedersehensflächen, Ann. of Math. 78 (1963), 289-299.

[Gℓ] Gromoll, D., Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären, Math. Ann. 164 (1966), 353-371.

[GℓG] Gromoll, D. e Grove, K., Rigidity of positively curved manifolds with large diameter, Seminar of Diff. Geometry, ed. S.T. Yau, Annals of Math. Studies 102 (1982), 203-207.

[GS] Grove, K. e Shiohama, K., A generalized sphere theorem, Ann. of Math. 106 (1977), 201-211.

[Gv 0] Gromov, M., Manifolds of negative curvature, J. Diff. Geom. 13 (1978), 223-230.

[Gv 1] Gromov, M., Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par Lafontaine et Pansu, Textes mathématiques 1 (1981), CEDIC-Nathan.

[Gv 2] Gromov, M., Curvature, diameter and Betti numbers, Comm. Math. Helvetici 56 (1981), 179-195.

[H] Hamilton, R., Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Diff. Geometry 17 (1982), 255-306.

[HR] Hopf, H. e Rinow, W., Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen, Comm. Math. Helv. 3 (1931), 209-225.

[IHR] Im Hof, H.C., Ruh, E., An equivariant pinching theorem, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 389-401.

[Ka] Kazdan, J.L., An isoperimetric inequality and wiedersehen manifolds, Seminar on Differential Geometry, Ed. S.T. Yau, Annals of Math. Studies 102 (1982).

[Kℓ 1] Klingenberg, W., Contributions to Riemannian Geometry in the large, Ann. of Math. 69 (1959), 654-666.

[Kℓ 2] Klingenberg, W., Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comm. Math. Helv. 35 (1961), 47-54.

[Kℓ 3] Klingenberg, W., Manifolds with restricted conjugate locus, Ann. Math. 78 (1963), 527-547.

[Kℓ 4] Klingenberg, W., Lectures on Closed Geodesics, Springer Verlag, Yellow series n. 230, 1978.

[Ko] Kobayashi, S., Topology of positively pinched Kähler manifolds, Tôhoku Math. J. 15 (1963), 121-139.

[Ku 1] Kulkarni, R., Curvature and metric, Ann. of Math. 91 (1970), 311-331.

[Ku 2] Kulkarni, R., Curvature structures and conformal transformations, J. Diff. Geom. 4 (1970), 425-451.

[La] Lawson, B., Lectures on Minimal Submanifolds, vol. 1, Monografias de Matemática, 14, IMPA, 1973, 2a. edição, Publish or Perish, Berkeley, 1980.

[LC] Levi-Civita, T., Nozione di parallelismo in una varietà qualunque..., Rend. Circ. Math. Palermo, 42 (1917), 173-205.

[Li 1] Lima, E., Introdução à Topologia Diferencial, Notas de Matemática, 23, IMPA, Rio de Janeiro, 1961. Reeditado em Pulicações Matemáticas, IMPA, 2001.

[Li 2] Lima, E., Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática do IMPA, 15, 1973.

[Ma] Massey, W., Algebraic Topology, an Introduction, Harcourt, New York, 1967.

[MR] Mercuri, F. e Rigas, A., Curvatura e Topologia, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[Me] Meeks III, W.H., A survey of the geometric results in the classical theory of minimal surfaces, Bol. Soc. Bras. Math. 12 (1981), 29-86.

[MR] Min-Oo, Ruh, E., Comparison theorems for compact symmetric spaces, Ann. Scient. École Norm. Sup. 12 (1979), 335-353.

[Mi] Milnor, J., Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, 51, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[Mo] Moore, J.D., An application of second variation to submanifold theory, Duke Math. Journal 42 (1975), 191-193.

[My] Myers, S.B., Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Math. J. 8 (1941), 401-404.

[Os] Osserman, R., A Survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969, 2a. edição, Dover Pub., New York, 1986.

[Pa] Pansu, P., Séminaire Bourbaki, 36e. année, 1983/84, n.618.

[Pe] Peters, S., Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds, J. reine angew. Math. 349 (1984), 77-82.

[Po] Poincaré, H., Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1905), 237-274.

[Pr] Preissman, A., Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comm. Math. Helv. 15 (1943), 175-216.

[R 1] Rauch, H.E., A contribution to differential geometry in the large, Ann. of Math. 54 (1951), 38-55.

[R 2] Rauch, H.E., Geodesics, symmetric spaces and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 294-320.

[R 3] Rauch, H.E., Geodesics and Curvature in Differential Geometry in the Large, Yeshiva University, N.Y., 1959.

[Ri] Riemann, B., Sur les hypotheses qui servent de fondement a la géométrie, Oeuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Langel, Librairie Albert Blanchard, Paris, 1968, 280-299.

[Ro] Rodríguez, L., Geometria das Subvariedades, Monografias de Matemática, 26, Rio de Janeiro, 1976.

[Sa] Sakai, T., Comparison and finiteness theorems in Riemannian Geometry, in Advanced Studies in Pure Math. 3, North-Holland, (1984), Geometry of geodesics and related fields, 125-181.

[Sh] Shikata, Y., On the differentiable pinching problem, Osaka J. Math. 4 (1967), 279-287.

[Sm] Smale, S., On the Morse index theorem, J. Math. Mech. 14 (1965), 1049-1056.

[Sy] Synge, J.L., On the connectivity of spaces of positive curvature, Quart. J. Math. (Oxford Series) 7 (1936), 316-320.

[SSK] Sugimoto, M., Shiohama, K., Karcher, H., On the differentiable pinching problem, Math. Ann. 195 (1971), 1-16.

[Ts] Tsukamoto, Y., On Riemannian manifolds with positive curvature, Memoirs of Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math. 15 (1962), 90-96.

[We 1] Weinstein, A., On the homotopy type of positively pinched manifolds, Arch. Math. 18 (1967), 523-524.

[We 2] Weinstein, A., A fixed point theorem for positively curved manifolds, J. Math. Mech. 18 (1968), 149-153.

[Wh] Whitehead, J.H., On the convering of a complete space by the geodesics through a point, Annals of Math. 36 (1935), 679-704.

[Yg] Yang, C.T., Odd-dimensional wiedersehen manifolds are spheres, J. Diff. Geometry, 15 (1980), 91-96.

[Ya] Yau, S.T., Curvature preserving diffeomorphisms, Ann. of Math. 100 (1974), 121-130.

Índice Remissivo

Álgebra de Lie, 44

Ação de um grupo, 23
Ação propriamente descontínua, 24
Aplicação
  conforme, 187
  diferenciável, 6
  exponencial, 73
  normal de Gauss, 143
Axioma
  da base enumerável, 31
  de Hausdorff, 31

Bola normal, 79

Campo
  de Jacobi, 124
  de Killing, 91
  de vetores, 26, 44
    colchete, 28
  de vetores v ao longo de uma superfície, 76
  variacional, 213
  vetorial ao longo de uma curva, 47
  vetorial paralelo, 58
Campos
  de Jacobi
    em variedades de curvatura constante, 124
Caracterização geométrica dos espaços localmente simétricos, 210
Conexão
  afim, 55
  compatível com a métrica, 59
  de Levi-Civita, 62
  de uma submersão Riemanniana, 206
  Riemanniana, 62
  simétrica, 60
Conexões de métricas conformes, 201
Conjunto focal, 255
Conjunto formemente convexo, 83
Coordenadas normais, 97
Coordenadas polares, 135
Curva
  divergente, 169
Curva diferenciável, 7
Curva diferenciável por partes, 74
Curvatura, 99
  de Gauss-Kronecker, 142

de Ricci, 108
de uma submersão Riemanniana, 207
do espaço projetivo complexo, 209
escalar, 108
média, 142
seccional, 105
constante, 107
seccional de um grupo de Lie, 115
Curvatura média como divergência, 156
Curvatura seccional da esfera, 145
Curvaturas principais, 142

Difeomorfismo, 11
Difeomorfismo local, 11
Diferencial covariante de um tensor, 113
Diferencial de uma aplicação, 11
Direções principais, 142
Distância, 161
Divergência, 93

Elemento de volume, 95
Equação
de Codazzi, 151
de Gauss, 143, 149
de Jacobi, 123
de Killing, 91
de Ricci, 149
Esfera normal, 79
Espaço
hiperbólico, 178
lenticular, 201
projetivo complexo, 208
projetivo real, 4, 21
tangent, 9
Espaço localmente simétrico, 117
Estrutura diferenciável, 3

Fórmula
da primeira variação, 215
da segunda variação, 218
Faixa de Möbius, 26, 34
Fibrado normal, 148
Fibrado tangente, 15
Fluxo geodésico, 71
Forma do índice, 268
Forma volume, 49
Formas espaciais, 182
Função energia, 214

Garrafa de Klein, 26, 36
Geodésica, 68
fechada, 281
minimizante, 75
normalizada, 69
Geodésica livre de pontos focais, 257
Geodésicas
da esfera, 74
de superfícies de revolução, 86
do espaço hiperbólico, 180
Geodésicas de um grupo de Lie, 90
Geodésicas do plano de Lobatchevski, 82
Geodésicas radiais, 79

Geometria
elíptica, 186
esférica, 186
hiperbólica, 186
não-euclidiana, 186
Gradiente, 93
Grupo de Lie, 43

Hiperesferas, 198, 203
Hipersuperfície, 142
Hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico, 202
Horoesferas, 197, 203

Identidade de Jacobi, 29
Imersão, 11
isométrica, 43
mínima, 147
totalmente geodésica, 145
Imersão umbílica, 202
Indice de uma forma bilinear simétrica, 268
Inversão, 188
Isometria, 42
infinitesimal, 91
local, 42
Isometrias
do espaço hiperbólico, 194

Laplaciano, 93
Lema
de Klingenberg, 260
de Otsuki, 248
do índice, 235
Lugar
dos pontos mínimos, 295

Métrica
bi-invariante, 44, 51
da geometria não-euclidiana de Lobatchevski, 64
de Lorentz, 66
invariante à esquerda, 44
produto, 46
pseudo-Riemanniana, 65
Riemanniana, 41
Métrica induzida pelo recobrimento, 184
Métrica Riemanniana no fibrado tangente, 88
Métricas conformes, 178
Mergulho, 11
Modelo do espaço hiperbólico, 196, 199
Multiplicidade do ponto conjugado, 129

Nulidade de uma forma bilinear simétrica, 268

Orientação, 19

Parametrização, 3
Partição da unidade, 32
Plano
projetivo, 34, 36
Ponto
conjugado, 129
crítico, 18
focal, 253
mínimo, 295
Primeira forma fundamental, 38

Primeira identidade de Bianchi, 101
Produto interior, 95
Projeção estereográfica, 20

Raio de injetividade, 300
Recobrimento duplo orientável, 37
Referencial geodésico, 92
Relação de Clairaut, 87

Símbolos de Christoffel, 62
Segunda forma fundamental, 141
Segunda identidade de Bianchi, 118
Singularidades de um campo de Killing, 157
Sistema de coordenadas, 3
Subconjunto contrátil, 90
Subgrupo a 1-parâmetro, 89
Submersão Riemanniana, 205
Subvariedade, 12

Tensor, 111
  curvatura, 112
  de Ricci, 109
  métrico, 112
Teorema
  de Bonnet-Myers, 221, 276
  de Cartan, 174, 281
  de comparação de Sturm, 263
  de E. Hopf, 96
  de Hadamard, 165, 261
  de Hopf e Rinow, 162
  de Jacobi, 274
  de Liouville, 97, 189
  de oscilação de Sturm, 265
  de Preissman, 287
  de Rauch, 238
  de Rauch para pontos focais, 258
  de Schur, 118
  de Synge, 227
  de Weinstein-Synge, 224
  do índice de Morse, 268
Toro de Clifford, 154
Transporte paralelo, 58
Triângulo geodésico, 285

Vértice, 75
Valor crítico, 18
Valor regular, 18
Variação, 212
Variedade
  completa, 161
  de Einstein, 120
  diferenciável, 2
  estendível, 160
  homogênea, 171
  orientável, 19
  produto, 34
  Riemanniana, 42
Variedade com curvatura seccional constante, 184
Vetor curvatura média, 147
Vetor tangente, 7
Vizinhança
  coordenada, 3
  normal, 79
  totalmente normal, 81
Vizinhanças

convexas, 85

Esta obra foi produzida nas
oficinas da Imos Gráfica e Editora na
cidade do Rio de Janeiro